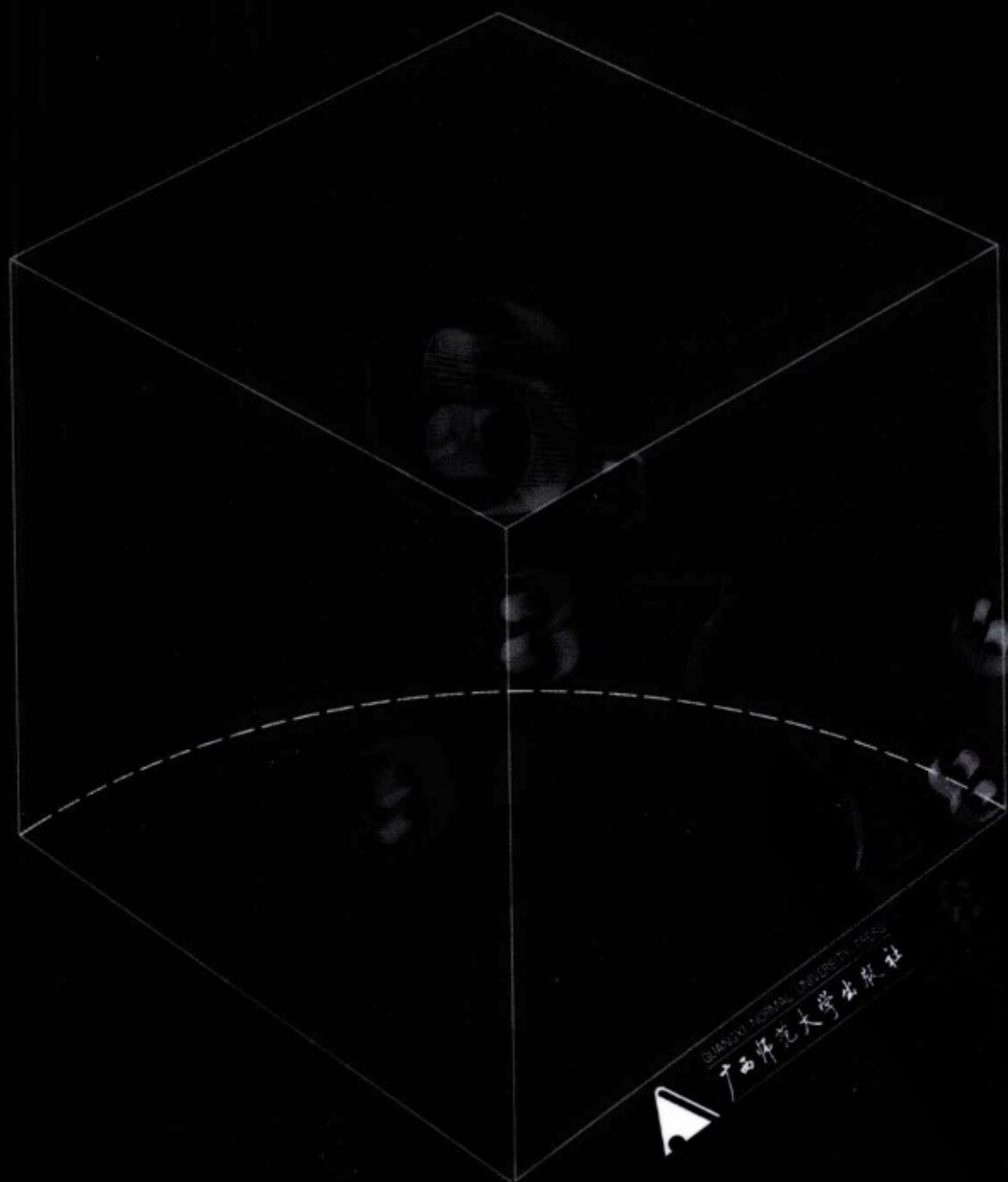


数学史

世界名著译丛

[英] 斯科特 著
侯德润 张 兰 译

A HISTORY OF MATHEMATICS



GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社

[数学史]

世 界 名 著 译 丛

[英] 斯科特 著
侯德润 张 兰 译



广西师范大学出版社
· 桂林 ·

A HISTORY OF MATHEMATICS



ISBN 978-7-5633-3488-9



01 >

9 787563 334889

定价 29.00 元

图书在版编目(CIP)数据

数学史/(英)斯科特著;侯德润,张兰译.—2版.
—桂林:广西师范大学出版社,2008.12(2009.2重印)
(世界名著译丛)
ISBN 978-7-5633-3488-9

I. 数… II. ①斯…②侯…③张… III. 数学史
IV. 011

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 017024 号

广西师范大学出版社出版发行

(桂林市中华路 22 号 邮政编码:541001)
(网址:www.bbtpress.com)

出版人:何林夏

全国新华书店经销

发行热线:010-64284815

山东新华印刷厂临沂厂印刷

(临沂高新技术产业开发区新华路东段 邮政编码:276017)

开本:680mm×960mm 1/16

印张:18 字数:260 千字

2008 年 12 月第 2 版 2009 年 2 月第 2 次印刷

印数:3 001~8 000 定价:29.00 元

如发现印装质量问题,影响阅读,请与印刷厂联系调换。



前 言

不管一个人对于数学史方面的书籍如何熟悉,他往往还是乐于发现一本新书,看看书中对某个论题是怎样处理的。在这一方面,斯科特博士已毋须我们再进行介绍。他早年关于华莱士和笛卡儿的著作已显示出他在这一方面的专心致志和博学,这两本书是基于他对原始资料的系统研究而写成的。在写现在这本书的时候,他遵循了同样的方针,并且涉及的范围更为广阔。他广泛地说明了一个数学家,特别是当他首次作出闻名于世的伟大发现和发明时,实际上说了些什么,以及是怎样说的。

于是我们就对从莱登纸草到现代计算方法的详细描述获得了栩栩如生的印象。让人高兴的是斯科特博士对于埃及、巴比伦和中国最早期的数学作出了如此充分的说明。通过以往 50 年来学者们的工作,关于这个古代的时期,尤其是关于这一时期中的算术知识以及实际上的代数方法人们了解得已经很多。希腊人对数学出色的贡献久已被人们所认识,而现在我们对他们在萌芽时期的发展又知道得更多了。作进一步说明用的插图的选择是恰当的,每一幅都经过了细致的审查,并给我们以更多的教益。这些插图反映了作者们的特色——例如巴罗对欧几里得著作富有生气的译文,当学童们学习欧几里得几何时,这个材料仍是一座“笨人难过的桥”^①。例如后来成为牛顿的分析方法的奠基石的欧几里得的著名引理,例如关于乌特勒的丰富多彩的符号,这些符号是对他的许多学生(而且往往是有名的学生)的巨大启发的源泉。

^① 笨人难过的桥:原文为 *pons asinorum*,指欧几里得《几何原本》中命题“等腰三角形两底角相等”。——译注

有些地方斯科特博士离开了编年史的次序,细致地按照论题来汇集发展史实,一次只致力于一个分支。例如,一直到建立解析几何的历史谈完以后才提出关于对数的历史,这里极为清楚地表现出了时间顺序上的间断。事实证明,这样的处理方法是有好处的,特别是对那些主要兴趣在于每次不停顿地探索一个分支的读者来说更是如此。人们对将二项式定理联系到《原理》一书的一章产生了深刻的印象,在一位大师手中这本书是说明物理概念和数学结构之间相互作用的有益的提示。斯科特博士依靠他对数学史的驾驭自如的能力写出了一本富有激励性的好书,我把它推荐给学生,也包括教师。

H.W.特恩布尔



作者序

人类曾经花费了辛勤而艰巨的劳动以建立一个宏伟的结构,在这个结构的基础上产生了近代数学。对这种结构的建立过程的考察不能不引起人们的惊奇和赞叹,对专家来说是如此,对所有认识到数学史和文化史之间的联系是多么密切的人们来说更是如此。令人感到鼓舞的是:近年来人们对研究数学知识发展的兴趣已日益增长,这种兴趣的反映即是在过去几十年中出现了这么多关于数学史的优秀论著。

循着我们前辈们在建成的数学这样一座巍峨大厦中所从事的事业的历程前进,没有什么事比这个更令人高兴和具有诱惑力了。然而,并不是每个人都有机会或者空闲能查看原始的著作和手稿。承蒙英国皇家学会会长和委员会、剑桥大学高等学院和剑桥三一学院院长和研究员们,以及大英博物馆管理委员们的好意,作者才能够不受限制地利用他们所拥有的著作和文件。本书希望它的出现会对那些不能有幸运地享受这些方便的人们有所帮助。

本书内容涉及到从上古时代到 19 世纪初的这段时期。在过去大约 100 年中,数学已经变得极为高度地专门化,发现数学新成就的步伐已经加快到这样一个程度,以致很少有人会贸然尝试涉猎近年来各种成就的所有方面。但是,在本书附录中仍然指出了某些主要的发展方向。虽然在人物小传中并未突出其细节,但我认为没有一些这样的细节也将会留下严重的缺陷。所以,在附录一中就包括了本书提到的某些比较重要的人物的简略生平。

这本书是为了跟踪过去 2 000 年当中主要数学概念的发展。所以,在这本书的篇幅中几乎找不到孤立的事实。按照这个目的,作者认为,从过去的数学家们的著作中广泛地引用材料是合适的,因为只有用这种方法才能对他们在劳动中所碰到的巨大困难作出公正的评

价。人们往往体会不到这些困难是多么巨大。我们有这样的倾向,就是忘记了自从人类第一次学会使用像小数和对数这样强有力的辅助计算工具以来,不过才经历了相当少的几个世纪,更不用说微积分和近代的几何方法的出现,更只有短短两三百年的历史了。说实在的,用不着回溯多少世纪,就能找到这样的数学家,他还未能接近一种精密有效的记数制。

作者认为,对于说明从上古时代到 19 世纪初期数学的发展史,这项工作规模如此宏大,以致不可能要求写得很详尽。虽然如此,作者还是希望能解释得足够清楚,以便认真学习的学生的需要至少可以部分地得到满足。此外,作者还希望又一本数学史著作的问世将会刺激出版其他的佳作以弥补本书的不足。关于数学的漫长历史的著作,书后列了一个范围较广的书目,其中大部分都不难找到。这个书目不仅对教师,而且对研究数学的学生也会有所帮助。

作者深深地感到,如果不是许多对数学史有着浓厚的兴趣和渊博的知识的知名人士的真诚帮助,这本书的出现是不可能的。对特恩布尔教授,作者深致谢意,不仅因为他为本书写了前言,而且因为他对原稿作了严格的批评,并提出了许多很有价值的建议。阅读本书中的证明步骤这一艰难而又吃力的任务,由威斯敏斯特学院科学学士 E.E. 艾郎蒙哥欣然承担。他还对本书提出了仔细斟酌过的意见,作者对此深表感谢。作者还要感谢科学学士 E.D.D. 斯科特,他帮助阅读了书中的证明并协助绘图,感谢英国皇家学会会员 A. 里奇·斯科特博士,他对本书的兴趣曾经是对作者的巨大鼓励。

对于皇家学会过去和现在的职员,作者表示最诚挚的感谢。前图书管理员 H.W. 鲁宾逊先生无保留地向作者提供他渊博的古籍知识。现任图书管理员 I. 凯伊先生和助理管理员 N. 鲁宾逊先生也都不辞劳苦地使编写本书的工作能尽量得到方便。

以上提出致谢的名单是不完整的,除此我们还得提到 Taylor & Francis 有限公司的各位职员先生,作者感谢他们真诚的礼貌和耐心,以及他们对出版本书的关注。

J.F. 斯科特

1957 年 12 月

目 录

前言	(1)
作者序	(3)
第一章 上古时代的数学	(1)
第二章 希腊数学的起源	(14)
第三章 三角学的发明	(45)
第四章 亚历山大科学的衰微——黑暗时期与复兴	(54)
第五章 东方的数学	(68)
第六章 文艺复兴时期的数学:从雷乔蒙塔努斯到笛卡儿	(85)
第七章 17 世纪:几何学的新方法	(109)
第八章 力学的兴起	(123)
第九章 小数和对数的发明	(131)
第十章 微积分的发明	(143)
第十一章 二项式定理和《自然哲学的数学原理》	(167)
第十二章 分析方法的发展	(181)
第十三章 从欧勒到拉格朗日	(196)
第十四章 近代几何之开端	(208)
第十五章 算术——数学中的女王	(213)
附录一 书中所提人物的小传	(223)
附录二 对书中提到的某些论题的简短注释	(254)
参考书目	(266)
人名译名对照表	(270)
地名译名对照表	(278)
后记	(282)

第一章 上古时代的数学

对于科学史家来说,上古时代最重要的要算是亚述人、巴比伦人、埃及人和腓尼基人了。其中只有巴比伦人和埃及人对数学进展有某些显著影响,他们单独提供了经得起科学分析的知识核心。随着我们的这些古文化知识的增加,我们越来越清楚地看到,我们子孙后代应当对这些好几千年前就居住在底格里斯—幼发拉底河以及尼罗河广阔河岸上的民族给予多大的感激啊!

大约在公元前 5000 年,中亚细亚有一个爱好和平的、有艺术修养的并且有才干的民族离开了他们的家园,落户在底格里斯—幼发拉底河谷(美索不达米亚)。他们和当地居民混合起来产生了一个新民族,叫做苏美尔族。在他们手里,文化达到了比往日更高的水平。他们居住在波斯湾尽头旅行商队路线的必经之地,所以养成了从事商业的兴趣,这迟早是要导致数学方面的知识的。从他们发明的灌溉系统可以明显看出,他们已经具有相当可观的工程技能。甚至在今天,仍可看到巨大运河网的遗迹,有些运河的规模相当大,不仅可以灌溉土地,而且还可以提供适当的排水系统。从他们留下的珍贵美术品来看,他们已经有不小的艺术才能。在外来者当中,有些人定居在美索不达米亚,另一些人则在尼罗河谷找到了新居,他们把苏美尔人的影响和知识带到了埃及。这里的文化曾达到了很高的水平,数学和医学尤为突出。

由于研究了这些原始人类遗留下来的工具和武器,考古学家已能想像出他们的一些生活习惯。目前的证据还比较零碎,尽管如此,仍有确凿的证据说明初等数学已在他们的生活中起了不小的作用。从实物交易中产生了计数和加法以及度量衡方面的基本运算;在装饰品

的粗略制作中就会逐渐发展起对简单几何图形的了解,这些装饰品现在还可以在他们的庙宇和岩洞的墙壁上看到;土地测量显然用到了一些几何图形,这无疑要导致一定的几何知识的获得;此外,依靠农作物生存的人需要有某种形式的历法来指示季节循环。尽管如此,数学的进展还是缓慢的。原始人只是注意生存斗争,除了猎取食物和本身安全以外,什么都考虑不到。

在上面提到的肥沃原野上,有两个强大的王国分外繁荣。每个王国的人们都逐渐发展出了一套技巧,经过几千年,至今仍使人感到惊奇和钦佩。但他们的成就都是经验知识的结果。无论是巴比伦人还是埃及人,我们都没有证据说明他们对自然现象曾作过耐心的仔细考察,有过那种概括推理的能力,而缺少它科学甚至不能开始。

埃 及

我们首先转向埃及。如前所述,在数学和医学领域里,埃及有着显著成就。这里我们关心的是前者。商业上和政府中的日常事务导致普通算术运算的知识,这些知识很早就成了普通常识,特别是对有闲暇研究它们的祭司阶级来说。埃及的计数制度是十进制,其原理始终是加法。一划表示 1,两划表示 2,依此类推;数字 10 是用一个形如反写的大写字母 U 的符号来表示,两个这样的符号表示 20,如此直到 90;100 是用新的记号来表示,像一根卷起来的绳子;还有一个记号像一朵莲花,表示 1 000;再一个记号像一根竖着的弯曲手指,表示 10 000,如此直到 1 000 000。每个记号都可重复使用 9 次。只要查查俘获大量俘虏的数目(这些数目无疑是被大大夸大了的),就可以弄清楚埃及人在表示大数方面是毫无困难的。^①但是,在他们的符号缺乏位置上的意义时,这种记法很麻烦,为了表示大数,必须用相应多个符号。例如为了表示数字 986,至少要用 23 个符号。乘法和除法的运算可以化为一系列需要每次倍乘的运算,例如 71 乘以 19 要用如下方法

^① 根据目前保存在牛津 Ashmolean 博物馆的第一王朝时期(公元前 3400 年以前)的正式王室权标上的记载,当时曾俘获过 120 000 名俘虏,400 000 头牛,1 422 000 只羊。(历史学家把古埃及的历史划分为 30 个或 31 个王朝。——译注)——原注

得到结果：

$$2 \times 71 = 142$$

$$2 \times 142 = 284 = 4 \times 71$$

$$2 \times 284 = 568 = 8 \times 71$$

$$2 \times 568 = 1136 = 16 \times 71$$

$$2 \times 71 = 142 = 2 \times 71$$

$$1 \times 71 = 71 = 1 \times 71$$

最后 3 个数的和就给出所求的乘积。除法结果可通过把上述步骤反过来而得到。如果乘以 10, 只需把单位符号改写为 10 倍的符号, 依此类推。在乘以 2, 5 和 10 的时候, 用这种方法不失为一种捷径, 这对日常需要来说已经够用了。食物分配和土地分派都要使用分数, 而这些事是经常遇到的。但是, 他们的做法要求有相当的才能。埃及人表示分数的方法是把分母写出来, 再在上面点一点或者画一个卵形线。这种记法有一个明显缺点, 就是只有形如 $\frac{1}{n}$ 的分数 (n 是整数) 才能这样表示。分数 $\frac{2}{3}$ 或 $(1 - \frac{1}{3})$ 的写法是例外, 这个分数有它自己的特殊符号; 除此以外, 凡是分子不等于 1 的分数都要分解成若干以 1 为分子的分数之和。例如 $\frac{2}{13}$ 要写成 $\frac{1}{8}, \frac{1}{52}, \frac{1}{104}$ 。那时没有加法符号, 所以就用几个数并列的方法表示加法运算。由于有这些限制, 当时不得不编制出一些表来说明如何把分子不等于 1 的分数分解成分子等于 1 的分数之和。分解的实际情形可在莱登纸草^①上的一张表中看出, 在这张表上, 所有形如 $\frac{2}{2p+1}$ 的分数均被分解成以 1 为分子的分数之和, 此处 p 表示 1 到 48 的任一整数。例如:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$$

① 古埃及时代, 有一种繁生于尼罗河泛滥后所形成的池塘和沼泽地里的草, 可用来造纸, 把这种草从纵面劈成小条, 把它紧挨着放在光滑的木板上, 加以压榨、晒干, 就成了黄色纸页, 粘成一个长卷, 用来写字, 叫做纸草。莱登纸草是在 1858 年由英国收藏家莱登所发现的纸草, 长 544 厘米。此外还有由俄国学者郭列尼舍夫在 1893 年获得的目前保存在莫斯科的莫斯科纸草, 这些都是记录数学纸草。——译注

$$\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$$

...

直到
$$\frac{2}{99} = \frac{1}{66} + \frac{1}{198}$$

如果分数的分子不是 2, 则采取如下程序: 假定这分数是 $\frac{7}{29}$, 先把它分解成

$$\frac{1}{29}, \frac{2}{29}, \frac{2}{29}, \frac{2}{29}$$

这些分数都可通过查表化简。将结果整理后, 最后的答案取下列形式:

$$\frac{7}{29} = \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{87} + \frac{1}{232}$$

这种处理分数的方法是很麻烦的。例如莱登纸草上说, 如果将 9 个面包平分给 10 个人, 则每人所得一份是 $\frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{30}$ 。虽然如此, 这种方法似乎已能适当满足记录者的需要。现在还没有线索说明这些表是怎样或是由谁编出来的。也许它们是几个书吏共同努力的结果, 通过试验而得到的。

莱登纸草的发现以及 1877 年艾森劳尔对它所作的解释, 对我们了解埃及的数学有相当大的帮助。这个文件上标有许多标题, 例如: 《渗入事物的准确计算》、《生活知识》、《玄机释义》、《秘密大全》等, 发表日期大约是在公元前 1650 年, 但它是许多世纪以前编写的一件作品的手抄本, 由一个叫做阿赫姆斯的高级祭司所完成。这个文件表明埃及人已经发明了解决初等代数问题的方法。“有一堆^①其 $\frac{2}{3}$, 其 $\frac{1}{2}$, 其 $\frac{1}{7}$ 及其全部, 共为 33, 这个堆是多少”, 用现代的记法写出来就是:

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{x}{2} + \frac{x}{7} = 33$$

这个问题被正确解出了, 答案是 $x = 14\frac{28}{97}$ 。但其分数部分被分成了几个分子等于 1 的分数之和, 写成:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{97} + \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776} + \frac{1}{194} + \frac{1}{388}$$

① 埃及人把未知数叫“堆”。——译注

纸草中有一个问题说明当时已有算术级数的知识。用现代的话来说,这个问题是:要把 100 个面包分给 5 个人,各人所得的份数构成一个算术级数,并且前 3 人所得总数的 $\frac{1}{7}$ 等于后 2 人所得之和。这个问题的解法早在中世纪就已成为很普通的方法,当时称为正伪法 (*regula falsi*)。阿赫姆斯令第一项最大,这使得公差是负数。他把首项和公差分别称为 a 和 d ,写出了

$$\frac{a + (a - d) + (a - 2d)}{7} = (a - 3d) + (a - 4d)$$

由此便得 $d = \frac{11}{2}(a - 4d)$ 。因此公差是最后一项的 $5\frac{1}{2}$ 。现在,让我们接着阿赫姆斯,令最后一项为 1,于是此级数是

$$23, 17\frac{1}{2}, 12, 6\frac{1}{2}, 1$$

但其和仅为 60,而它应当是 100。所以每一项应当乘以 $\frac{100}{60}$,因此我们得到下列结果:

$$38\frac{1}{3}, 29\frac{1}{6}, 20, 10\frac{5}{6}, 1\frac{2}{3}$$

另一个问题是:10 袋大麦分配给 10 个人,要从第一个人起,每人所得份数依次增加 $\frac{1}{8}$ 。问第一个人所得份数是多少?依照上述推理可以证明,答案是 $\frac{7}{16}$,即 $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ 。

在希克索斯纸草^①中,有一个问题涉及到几何级数的知识。一位妇人的家里有 7 间贮藏室,每间贮藏室里有 7 只猫,每只猫捉了 7 只老鼠,每只老鼠吃了 7 棵麦穗,每棵麦穗可以长出 7 升麦粒。在表示贮藏室、猫等的图画旁边,写有数字 7, 49, 343, 2 401, 16 807。贮藏室、猫、老鼠等的总数是给出了,即 19 607,但没有指出是用什么方法得到这个数的。毫无疑问,这个问题的作者是用逐项相加这一简单方法得到解答的。没有证据说明作者使用了求和公式,抑或确实是用到几何级数的什么性质。其他问题都是纯实用方面的,例如根据给定的谷物数量确定面包的数量,家畜头数的计算等。

这些纸草表明,埃及人在几何方面也能解决某些有实用价值的问

^① 参看 Flinders petrie, *The Wisdom of the Egyptians*, 89 页。

题。他们提出了计算土地面积、仓库容积、粮食堆的体积、石料和其他建筑材料多寡等的法则。他们没有给出理论结果,也没有给出计算程序的一般法则。埃及人从未发现过一个实用公式,也没有证据说明他们对日常生活以外的问题感到过什么兴趣。埃及人只要自己的数学知识能应付日常生活中的问题,就已感到满足了。建筑师和测量员的需要,要求有初步的几何知识,但没有证据说明,埃及人曾对几何图形的性质有过什么兴趣,更不用说有什么东西能促使他们去证明自己作图方法的正确与否了。虽然如此,他们在建筑活动中达到的精确度还是非常高。在基奥普斯王朝(公元前 2900 年左右)时代建筑起来的金字塔,是由许多巨大的石灰石块组成。雕刻这些石块的精密度是惊人的。金字塔本身建筑在一个非常接近于正方形的基座上,基座每边的平均长度是 755.79 英尺,任何一边与此数值相差不超过 $4\frac{1}{2}$ 英寸,正方程度和水平程度的平均误差微乎其微。塔基各边的取向是一个明显的证据,说明埃及占星家曾作过非常仔细的观测,其中有两边差不多是指向正北和正南,另两边的设计与垂直线的偏差至多为 3 厘米,这应当说是非常惊人的成就。塔高 481.4 英尺,塔基周长 3 023.16 英尺,后者与高度之比非常近似于圆的周长与其半径之比。和上古时代的许多其他民族一样,埃及人似乎也已熟悉这样的事实:如果三角形三边的边长与 3,4,5 三个数成正比,则此三角形是直角三角形。但是,没有可靠的证据说明他们在建筑活动中曾用过这个事实。德谟克利特(公元前 460 年~公元前 370 年)曾经骄傲地自夸说:“在不加证明的平面图形作图方面,还没有谁能胜过我,甚至连埃及的测量员也不能。”但这并不意味着能胜任测定神殿方位的测量员曾经用过上述定理,也没有迹象说明他们在工作中曾用过力学原理,甚至建立这样一个伟大建筑物所用的工具也是极为简单的。杠杆和斜面是用到了,但是其他简单机械,甚至轮轴和滑轮,也可能他们都不知道。当时没有使用这些机械的任何实际需要。奴隶劳动力已经够多了,对于担负这些工程的监工者说来,时间和劳动力的浪费是无足轻重的。^①

在连小小一块良田国民都不能忽视其耕种的国家里,在一个土地所有权的观念大大关系到所有者切身利益的国家里,测量技术会显得

^① 另一方面,驾驭和供养这一大群人的问题会产生一些极为复杂的问题,这些问题迄今尚未得到令人满意的答案。

越来越重要。基于这一事实,埃及人在这个数学分支中必然会得到某些显著结果。尼罗河周期性泛滥之后为了重划地界,需要有高度发达的土地测量技术。希罗多德叙述道,为了使征收赋税公平合理,萨斯特雷斯(拉美西斯二世,公元前 1400 年左右)曾将埃及的土地划分为相等的矩形(或正方形)小块。然而,尼罗河涨水引起的每年一度的洪水,扫除了这些小块的界限,因此不得不派测量员去重新校对征税额。莱登纸草上载有 19 个关于土地面积和谷仓容积的问题,这些问题都以惊人的准确性被算了出来。纸草的第三片讲到如何去确定正方形和矩形、三角形和梯形以及能分割成这些形状的土地面积。前二者的面积计算结果是正确的,至于三角形和梯形,则有一些疑点。有一个图形画的是一个底边长度为 4 的三角形。另外两边之一量出来是 10,而面积注明是 20。这就发生一个问题:这三角形是否是等腰的。如果是的话,上述答案就是不正确的,抑或是直角三角形?在此情形下答案就是正确的了。虽然一般认为这个三角形是要画成等腰的,但无法理解的是,已经具有相当丰富数学知识的埃及人竟会产生这样的错误。很可能是因为这个图画得太拙劣,只是一个粗略的草图,所以看起来像一个等腰的三角形而实际上是直角三角形。同样,有一个显然为等腰的梯形面积注明是 100,而预期应为 99.875。但这也许同样可以归咎于作图方法拙劣的缘故,在两条看来是相等的边当中,有一条也许是垂直于两条平行边的。

关于圆面积的计算,埃及人的结果比上古时代任何其他民族的结果都更准确,这从莱登纸草中的一个例子可以看出。例子是要求算出一块圆形土地的面积。“有一块 9 凯特^①(即直径为 9)的圆形土地,其面积多大?今取去直径的 $\frac{1}{9}$,亦即 1”,作者直接写道,“则余 8。作乘法 8 乘以 8,得 64。这个大小就是面积。”^②纸草在同样方针的指导下确定了一个直径为 9,高度为 10 的圆柱形谷仓的容积。“首先给定谷仓的周围是 9,高度是 10。今从 9 中除去 $\frac{1}{9}$,剩下 8;将此数乘以 8,得 64;再将此数乘以 10,便得 640。”^③由此可见,他们认为圆的面积等于

① 古埃及的长度单位,1 凯特(khet)相当于 21 米。——译注

② Chace, *The Rhind Papyrus*.

③ Flinders Petrie, *The Rhind Papyrus*, 35 页。

一个边长为此圆直径的 $\frac{8}{9}$ 的正方形面积,这个结果导致圆周长与其直径之比是 3.16。

上一结果可能是用如下方法得到的。埃及人已经知道直棱柱的体积等于底面积乘以高,并且知道这一结果在圆柱形仍然成立。所以他们就取一个底面直径为 d 的圆筒,注水于其中,直到一定的高度,譬如说 h 。再将水倒进另一立方体容器内,此立方体的边长也是 d ,并调整水量直至其高度也达到 h 。现在比较两个容器里的水量,也许是用称重量的方法,显然,它们与容器的底面积成正比,即成比 $(kd)^2 : d^2$, 此处 $(kd)^2$ 是圆的底面积。这个比值被求出为 $\frac{61}{84}$, 据此便可得出上述结果。

在另一问题中,一个直径为 8 的半球形碗的体积被求出是 136.53。这导致圆周与其直径之比的一个不太准确的数值 3.2。

我们说过,埃及人已经知道如何计算圆柱体和直棱柱的体积。许多问题中计算了这些形状的仓库的容积。但是,他们最惊人的成就却在于两端是正方形的截棱柱体体积的计算。莫斯科纸草上清楚地说过这个问题:“你这样说:一个截棱锥体 6 腕尺^① 高,底面每边 4 腕尺,顶面每边 2 腕尺。你这样做:将 4 自乘,得 16(底边的平方 = 16)。再将 4 乘以 2,得 8,它就是底边乘以顶边。再将 2 自乘,得 4(顶边 2 的平方 = 4)。将 16 加 8 再加 4(底面、中截面与顶面的面积之和),得 28。再取 6 的 $\frac{1}{3}$ (高的 $\frac{1}{3}$) 得 2。再取 28 的两倍,得 56(三个面积之和乘以高的 $\frac{1}{3}$)。看,这个 56 正好就是你要求的体积。”^② 这个惊人的结果表明,埃及人早在公元前 1850 年就已熟悉确定两端为正方形的截棱锥体体积的方法了。它也就是我们今天用公式 $V = \frac{h}{3}(A^2 + AB + B^2)$ 所表示的方法。

土地面积的问题明白地指出这样一个事实:埃及人已经熟悉二次方程。有一个这样的问题说明怎样把一个面积为 100 的正方形分成两个较小的正方形,使得其中一个正方形的边长是另一个的 $\frac{3}{4}$ 。用现

① 古长度单位,由肘至中指指尖的长度,约 18~22 英寸。——译注。

② Flinders Petrie: *The Rhind Papyrus*, 39 页。

在的记号表示起来,就是要解方程组 $x^2 + y^2 = 100, x:y = 1:\frac{3}{4}$ 。解这个问题的人是这样进行的。作一个边长为 1 的矩形(正方形),并取其 $\frac{3}{4}$ 为另一正方形的边。将这个数自乘得 $\frac{9}{16}$ 。因此总面积为 $1 + \frac{9}{16}$ 或 $\frac{25}{16}$ 。再取这个数的平方根得 $= \frac{5}{4}$ 。取 100 的平方根,得 10。将 10 除以 $\frac{5}{4}$, 这便得出 8。这就是一个正方形的边长,另一正方形的边长是其 $\frac{3}{4}$ 。在别的纸草中也可以找到其他这类例子。

在谈埃及人的数学知识时,参考一下埃及的天文学是恰当的。和所有上古时代的民族一样,埃及人很早就感到有必要建立度量时间的方法了。巴比伦人和亚述人奠定了现代时间度量制度的基础。虽然埃及天文学几乎毫无疑问是以巴比伦的天文学为基础,但是建立在天体运动基础上的实用历法的引用,则应看成是埃及人的杰出成就之一。太阳年的长短取决于人们对狼星(即现在的天狼星)和太阳同升(即在日出之前最先看到狼星的升起)现象的观测,这个现象正好与尼罗河的周期性涨落有着密切的对应关系,所以早在公元前 4241 年,祭司们就建立了每年 12 个月,每月 30 天,另外再加 5 天节日的制度。后来的观测说明一年共有 $365\frac{1}{4}$ 天。由于那时没有每四年中闰一天,所以月份逐渐同季节脱节,因此,如果某年狼星与太阳同升正逢第一个月的第一天,则相隔 730 年之后,这个现象就会发生在一年的正当中。再经过 731 年会重新一致起来,因此每隔 1461 年,首先看到狼星出现的时刻会回到它原来的时刻。这段时间称之为狼星周期。

看来,埃及人对数学的主要贡献是:

1. 他们完成了基本的算术四则运算,并且把它们推广到分数上;他们已经有了求近似平方根的方法。
2. 他们已经有了算术级数和几何级数的知识。
3. 他们已能处理包括一次方程和某些类型的二次方程的问题。
4. 他们几何知识的主要内容是关于平面图形和立体图形的求积法。
5. 他们在求圆面积以及把圆分为若干相等部分的问题上,已经有了正确的知识。

6. 他们已经熟悉比例的基本原理,某些人还从其中看到了我们今天应称之为三角函数的那种观念的萌芽。

巴 比 伦

巴比伦人的贡献的重要性并不亚于埃及人,但和埃及人一样,他们也没能建成一门系统的科学。关于巴比伦人的记载不如埃及人的多。埃及人会用笔和纸(纸草),巴比伦人则用针在粘土泥版上刻写。这些泥版经常是靠太阳烘干的。但是,保存这些记录的原样显然是困难的,而且这种书写方式也会阻碍长篇论著的编写,因此在巴比伦人的文献中没有像莱登纸草那样的东西,甚至像莫斯科纸草的东西也没有。现在留下的一些记载包括公元前 2 000 年左右的一段时期,这些记载清楚地指出了巴比伦人在数学和天文学方面的某些显著成就。

巴比伦人曾和埃及人长期保持着商业上的密切接触,他们和埃及人一样,也很熟悉十进制。然而他们还补充了一种以 60 为基数的进位制。关于这一点的证据来源是地质学家 W.K. 劳夫特斯 1854 年于森开莱(现在的拉山或拉莎)发掘出来的两块泥版。这两块泥版表明巴比伦人已是高度熟练的计算者。其中有一块大概是汉谟拉比^①(约公元前 2000 年)时代的,上面载有一串数字,前 7 个是 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49。由此显然可知,巴比伦人已经知道自然数平方的数列。但在 49 或 7^2 之后,发现这个数列中断了。在我们预期要发现 64 的地方,看到的却是 1.4,其后跟着 1.21,再后是 2.24,直到最后是 58.1。这个数列是无法理解的,除非假定有一个基数 60,亦即

$$1.4 = 60 + 4 = 64 = 8^2$$

$$1.21 = 60 + 21 = 81 = 9^2$$

直到
$$58.1 = 58 \times 60 + 1 = 3\,481 = 59^2$$

因此,巴比伦人显然已经有了记数的位置观念,这使我们想起埃及人对这点还是完全不知道的。然而,这个重要原则不久就被遗忘了,没有证据说明它曾在希腊或罗马使用过。但是,要把 2 000 年以前预见到现代的记数制度这一点归功于巴比伦人,那会是过分的。他们

^① 巴比伦第一王朝国王。——译注

的记数制模糊而不明确,容许有多种多样甚至矛盾的解释。他们用来表示单位的符号也同样用来表示 $60^2, 60^3, \dots$ 甚至用来表示 $\frac{1}{60}, \frac{1}{60^2}$ 等。同样,代表 7 的符号同时可以表示 $7, 420(7 \times 60), 25\ 200(7 \times 60^2)$ 或 $7 \times \frac{1}{60}$,更不用说可以表示一大堆其他的数。那时没有表示零的符号。根据与上述泥版不同的来源可以看出,巴比伦人是用留空隙的方法表示数字中间的零,遇到不明确的时候,数字的真正数值就要从上下文的语气来确定。的确,在这么多的可能性里进行选择是很困难的,因此文句往往要能使读者不致把数字混淆起来,譬如把 5 和 $300(5 \times 60)$ 或 $5 \times \frac{1}{60}$ 混淆起来。

因此,巴比伦人虽然在书写数字方面发展了重要的位置原则,但数字的真正数值仍要靠智力来推测。森开莱泥版不能帮助我们解决零究竟是如何表示的问题。即使这些泥版是照原样保存下来的,也不能解决这个问题,因为在一个一直写到 59^3 或 205 379 的立方数列中,没有发现一个例子其中第二位是空着的,所发现的全是三位数。所以问题仍然存在,在没有解决这个问题之前,把这个在西方直到中世纪尚未出现的发现归功于巴比伦人会是过早的。

巴比伦人似乎已是数学表的积极编纂者。在他们的泥版中,刻有乘法表、平方根表、倒数表等。他们表现出对几何级数是熟悉的。分数经常用到,不过埃及人是令分子为常数并等于 1,而巴比伦人则是令分母为常数并等于 60。人们提出了许多理由来解释这种选择。毫无疑问,有一个能被许多因子整除的分母是很方便的。然而,康托尔曾提出一个意见说,这样做的根源可能是由于以下事实:早期的巴比伦人认为一年共有 360 天,在这段时间里太阳围绕地球转了一整圈。这便导致圆之分割为 360 度,每一度代表一天中太阳所走过的距离。巴比伦人似乎已经知道这样的事实:等于圆半径的弦能够绕圆周截 6 次,因此圆可分成 6 个扇形,每个扇形的中心角为 60° 。

像埃及人一样,巴比伦人已经具有相当高的解题技巧。有证据说明,他们已能解决一些在系数为整数的极简单情形下导致的三次以下的方程的问题。他们的几何学已经发展到大致和埃及人相同的水平。在阿拉伯的泰陆发掘出来的、目前保存在君士坦丁堡奥陶曼博物馆里的一块泥版表明,巴比伦人已经有了确定许多平面图形面积的正确法

则。这块泥版可以回溯到公元前 2200 年左右。其中载有一幅被分成 15 部分的大片土地的平面图,有 7 个部分为直角三角形,4 个非常近似于矩形,还有 4 个是梯形,其一边垂直于两平行边。每个图形的面积都被正确地算出了,计算法则很可能是靠经验发现的。巴比伦人早在公元前 2000 年就有了毕达哥拉斯定理的知识,因为在那个时期,曾有一个问题解出了一个边长为 40 和 10 的矩形门的对角线是 41.15 , 即 $41\frac{15}{60}$,这个数值接近于准确值 41.231。他们把圆的面积取为圆周平方的 $\frac{1}{12}$,由此似乎可以看出,他们认为圆周是直径的 3 倍。他们也知道怎样计算许多立体图形的体积,包括圆柱体和平行六面体的体积。

可以认为,巴比伦人已经知道如何去解含两个未知数的二次方程。这个知识的产生是由于他们企图解决如下的问题:给定矩形的周长和面积,试求边长,即解方程组 $x + y = a, xy = b$ 。这个问题在上古时代是很普通的,它也许是由于想反驳这样一种普遍流行的看法引起的,即认为平面图形的面积唯一依赖于它的边长,因而具有同样边长的图形就有相同的面积,就像圆和正方形的情形那样。只要这种看法继续存在,它就会给投机商人提供无限的活动范围。这个问题曾遭到希腊人的系统驳斥。巴比伦人的办法是靠经验,他们曾定出,边长保持为常数的图形可以有不同的面积值。例如对一个周长为 40 的矩形,所得的结果可列表如下:

$a + b = 20$		
a	b	面积 ab
10	10	100
8	12	96
6	14	84
4	16	64

等等。

巴比伦人的天文知识是渊博的。它附属于占星学。虽然如此,他们对星体运动的耐心观测却为我们以后在喜帕恰斯和托勒密的工作中所遇到的问题的科学解决办法提供了必要的轮廓。巴比伦人的记录是精确而连续的,他们根据对天体运动的观测非常准确地定出了天

文学周期,例如关于太阴月^①,他们定出的值与真实值之差约为1秒。早在3 000年前,巴比伦的占星家就记下了金星与太阳同升同落的现象,到了公元前4世纪,他们的记录已能使他们预先算出太阳和月亮的位置,从而预测到日月食现象。

在巴比伦的历法里一年有12个月,每月有30天,每6年年末加上第13个月作为闰月。但和埃及人一样,对于一个天体事件和另一天体事件之间的关系,他们的了解发展得很慢。大约在公元前3世纪才开始有这种了解的萌芽,作为一门科学来说,天文学本质上乃是希腊人的创造。

我们可以把巴比伦人的贡献总结如下:

1. 在数学方面,巴比伦人已经知道如何度量矩形、直角三角形和等腰三角形的面积,以及圆柱体和平行六面体这类正多面体的体积。
2. 他们对圆面积的度量比不上埃及人。
3. 他们在计数上已经有了位置值的概念,但似乎没有表示零的方法。
4. 在天文学方面,他们已有一系列长期进行研究的记录,并且已经发现许多准确性很高的天文学周期。他们的贡献是一般性的,而决不是科学的。

① 一个太阴月为29天12时44分。——译注



第二章

希腊数学的起源

这些从古代文化中发展起来的技术,和它们所累积的巨大知识宝库,将永远引起人们的赞叹和惊奇。但是我们找不出什么证据来证明它们是沿着科学化的道路发展的。它们所获得的法则,大都是经验性的,充其量也不过是少数简单事例的推广。知识就是力量。只是由于需要的驱使,人们才去追求知识。巴比伦的天文学尤其如此,它是从来也离不开神话和魔术的。为了知识本身而去追求知识的概念,对于巴比伦人和埃及人说来,是完全不适合的,这要一直等到希腊人来进行。真正科学的起源不是在巴比伦,也不是在埃及,而是在爱琴海的爱奥尼亚海岸一个小小的希腊殖民地上发现的。尽管如此,古代文化对希腊的影响很大,希腊人从古代文化中继承了原始资料。“希腊科学的奇迹”是由巴比伦人和埃及人预先准备好了的。

希腊人在数学方面比在任何其他学科有着更惊人的进步。他们不仅在数学的各个部分中作出了显著的、不朽的贡献,而且还为它们以后的发展奠定了永久的基础。我们转向希腊人,乃是为了寻找严格演绎证明的概念,亦即寻找在定义、公理和公设的基础上通过一系列定理来发展一门学科,以及不断争取全面推广和抽象的方法。

在希腊数学史中有三个时期:

1. 毕达哥拉斯学派时期。
2. 柏拉图和柏拉图学园时期。
3. 亚历山大学派时期。

但是在此以前,大约在公元前 6 世纪,在爱琴海沿岸已经略见端倪。这些新学问的先驱者是米利都的泰利斯,阿那克西米尼和阿那克萨哥拉。泰利斯曾周游各地,在他访问埃及期间学到了已经在那里实

施着的土地测量的经验法则。

大约在公元前 330 年,亚里士多德的弟子欧德摩斯精心编纂了一本从最初起始的希腊几何学史,这就是人们常常提到的《欧德摩斯摘要》。公元 5 世纪,普罗克洛斯曾简短地评论过至欧几里得为止的早期几何学史^①,人们以为这是以欧德摩斯为根据的。在提到爱奥尼亚学派时,普罗克洛斯曾宣称:“泰利斯是去到埃及并把几何学这一专门知识带回希腊的第一个人。他本人发现了许多命题,并将许多其他基本原理告诉给他的继承者,在某些方面他的方法更普遍,在另一些方面又更经验性些。”普罗克洛斯把下列五个命题的发现归功于泰利斯:

1. 任何圆周都要被其直径平分。
2. 等腰三角形的两底角相等。
3. 两直线相交时,对顶角相等。
4. 若已知三角形的一边和两邻角,则此三角形完全确定。
5. 半圆周角是直角。

尽管泰利斯在数学的实用方面表现出的兴趣不大,但据说他曾用手杖的投影与金字塔的投影作比较的方法计算过金字塔的高度。果真如此,那就意味着泰利斯已经熟悉相似三角形的基本性质了。关于三角形三内角之和的知识也要归功于他,但其证据远不是无可争论的。可以肯定的是,泰利斯把几何学作为一门演绎科学确立了起来。上述一切事实对埃及人来说都是早已知道了的,只是埃及人一直没有把它们记载下来。而在泰利斯那里,它们却成了几何科学的开端。

泰利斯也熟悉巴比伦人的天文学,据说他曾利用巴比伦人的记载预测过一次日食,这次日食在公元前 585 年实际发生了。很难理解这是怎么发生的。首先,日食的真正本质对他来说想必是不了解的,因为他认为地球乃是浮在水面上的一块圆盘。其次,很难使人相信早在公元前 6 世纪的时候,巴比伦人的记载就已经广泛到可以作出如此准确预测的程度。

爱奥尼亚学派历经的时间不久,到了公元前 6 世纪末,由于波斯游牧民族的进攻,人们都向西方逃难,这就把希腊文化带到了西方。意大利和西西里岛变成了学术的新中心,学术在意大利领土上有了惊人的发展,尤其是在数学方面。早在公元前 6 世纪,毕达哥拉斯(公元

^① Friedlein, Procli in Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii, Leipzig, 1873.

前 580 年 ~ 公元前 497 年)就已经在意大利南部克劳登建立了学派。它原来只是一个宗教团体,但是它的成员都积极追求学问。毕达哥拉斯学派没有给后人留下什么著作,但可以很明显地看出,这个学派的数学修养非常高。普罗克洛斯记载说:“毕达哥拉斯学派把数学研究变成了一种自由教育的形式,从头来检查它的原理。”在他们手里,整个数学变得更抽象,更加脱离经济生活的需要了。在这个学派的数学发现史中,其奠基人本身的贡献大小就永远只能由后人去猜测了。

毕达哥拉斯学派对于自然现象中的某些数字关系,已经有了印象。他们已经知道,长度与 4,3,2 成比例的振动弦能够产生一个主音以及它的第五音和第八音。由此导致一个信念:终极的实在可以在数字里找到。亚里士多德说:“毕达哥拉斯学派似乎把数看成本质,这就是说,看成是万物的元质。”结果,关于数的科学吸引了他们强烈的注意,而前人所发展起来的计算技术(实用算术)却反而不大为他们所关心了。他们首先把抽象的数的概念放到首要地位。他们把数分成了奇数和偶数、素数和合数、完全数等。他们在研究这些数的时候,发现了许多相当复杂的定理,其中有许多后来被欧几里得收集到他的著作《几何原本》中。

毕达哥拉斯学派的算术与几何学有着密切联系。它的根据是堆成各种形状的一堆堆的鹅卵石或石头,这样他们就用图形来表达数——三角形数、正方形数等。起始 n 个自然数的和,即 $\frac{1}{2}n(n+1)$, 形成一个三角形数;起始 n 个奇数的和,即 $1+3+5+\cdots+(2n-1)$, 形成一个正方形数,等等。一个点是有大小的,积点成线,积线则成面,等等。但是人们发觉,这和毕达哥拉斯学派的另一发现有着严重的抵触,那就是正方形的对角线与其一边之比不能表示为两个正数之比,因此无法再主张所有的量都有一个共同度量。某些线和其他线不能通约的问题不仅对毕达哥拉斯学派形成了一个严重障碍,而且后来的事实证明,它在整个希腊几何学史中也都是一块绊脚石。由于人们试图寻找一种不使算术完全脱离几何学的解决办法,这就导致一种新型数的引进,那就是无理数。

对于毕达哥拉斯学派来说,研究几何学也和研究算术一样,都是为研究而研究的。有很多定理应该归功于他们。除了关于直角三角形的著名定理之外,毕达哥拉斯学派还熟悉平行线的性质,他们利用这些性质证明了三角形的三内角之和等于两直角,由此他们推证了关

于多边形诸内角之和的定理。欧几里得《几何原本》中大多数是关于直线与面积之间关系的定理,这都是他们已经知道了的。他们还发展了关于比例的理论,并且熟悉欧几里得《几何原本》第六卷中的论题。由于某些原因,他们对于圆的几何学并无多大兴趣。他们对数学发展的主要贡献就是他们给予数学以演绎的特性。对他们说来,几何学已经不再仅仅是一些靠经验发现的规则的汇集了。

毕达哥拉斯学派的影响越来越大,在它的奠基人于公元前 497 年逝世之后,这个学派在泰兰潭地区还一直繁盛到将近 4 世纪末。以菲罗拉亚斯和亚及他斯为代表的后期毕达哥拉斯学派,仍然保持着其奠基人的传统,他们的工作对数学发展所给予的巨大影响,历时达两个世纪之久。

哲人派 公元前 480 年波斯人在赛兰米斯战役中被薛西斯击败了以后,雅典很快地兴起,成了世界的商业中心和文化中心。伯里克利花了很多钱来装饰他的首都。因为当时奴隶占国家人口的大多数,劳动力并不缺乏,这就在有闲阶级中产生了一种强烈欲望,要求有某种形式的文化,作为社会的或政治的帮助。一批职业教师满足了这个要求,这些教师感到执教是光荣的,并且以此为生。这些人被大家称为哲人,或智者。他们和毕达哥拉斯学派不同,并没有形成一个以某种共同学说或哲学为特征的阶级或派别。他们的兴趣主要集中在传授辩论的艺术,但由于他们对“国民”教育产生了广泛兴趣,这就使他们做了一些有益的事。虽然数学并不是他们的主要业务,但是他们在数学历史中的重要性并不小。他们当中许多人作出了有价值的贡献,特别是在关于圆的几何性质方面(这里要提醒一下,它一直是毕达哥拉斯学派所忽视的)。这主要是由于他们在研究古代三个古典问题上的兴趣。

关于这三个问题,数学家们曾经仔细思索了许多世代。它们是:

1. 三等分一个角,或者同样的说法是,三等分一段圆弧。
2. 使一立方体体积加倍,亦即求出一立方体的边,使此立方体的体积是给定立方体体积的二倍。
3. 化圆为方,亦即求出一个正方形或其他直线图形,使其面积与给定圆形的面积恰好相等。

二等分一个角的问题即使对古代的几何学家来说,也不会引起任

何困难。然而一个角的三等分会被证明是不可能的。现在已经知道这个问题要靠直尺和圆规作有限次操作是不可能解决的,而直尺和圆规当然只是希腊人所能采用的仅有的工具。伊里斯的哲人派中有一个最著名的人物,叫做希庇亚斯(生于公元前 460 年)。他是一个以一切学问为己任的人,对这个问题曾经钻研过,并且认识到只使用直尺和圆规是不够的,还要求助于其他工具,其中包括非圆弧形曲线的使用。希庇亚斯所使用的一种叫做割圆曲线,这个名称的由来是因为它也可以解决求面积问题,就像它可以解决一个角的三等分(其实可以任意等分)问题一样。

普罗克洛斯曾用这样几句话来描述这种曲线:“在正方形 $ABCD$ 中,以 A 为中心, AB 为半径画出 $\frac{1}{4}$ 个圆 BED 。使直线 AB 均匀地绕其端点 A 移动,以使另一端点 B 在给定时间内沿着整个 BED 弧移动。同时使直线 BC 也均匀地移动,并且总是保持与直线 AD 平行。直线与移动半径的交点轨迹就是曲线 BFG 。这条曲线就是割圆曲线。”(图 1)。它的

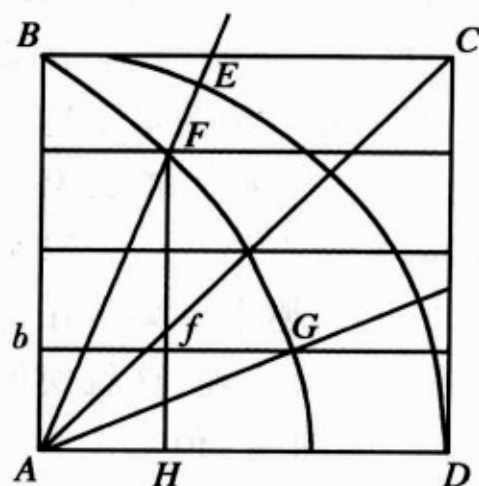


图 1

性质是:若向圆周任意作一直线 AFE ,则圆的 $\frac{1}{4}$ 弧 BED 与弧 ED 之比等于直线 BA 与 FH 之比^①。由于一条直线能以任意比例分成任意多部分,所以圆的 $\frac{1}{4}$ 也能如此,因而一个角可以三等分或任意等分。因为 $FH:AB$ 等于 $\angle FAD:\frac{\pi}{2}$,所以割圆曲线画出后一定能帮助我们达到圆的求积的目的。

倍立方问题的产生,很可能是根源于人们企图把毕达哥拉斯定理推广。要作一个正方形使其面积等于给定正方形面积的两倍,这是一件简单的事。这也许就使人联想到求一个立方体的边,使其体积等于给定立方体体积的两倍的问题。但是根据爱妥斯泰尼斯所述,公元前

^① $\angle BAD:\angle EAD = \widehat{BED}:\widehat{ED} = BA:FH$ 。要三等分 $\angle EAD$,可在 f 处把 FH 分成两部分,使得 $2Hf = fF$ 。过 f 作 bfg 与 AD 平行, bfg 在 G 点与曲线相交,连接 AG 。于是 $\angle GAD$ 便是 $\angle EAD$ 的 $\frac{1}{3}$ 。

430 年雅典城发生过鼠疫,居民们曾向得洛斯神殿请求驱除疫疠。他们受命要把祭坛加大一倍,而不准有损于它的立方体形状。因此倍立方问题往往被称为得洛斯问题。和上述三等分角的问题一样,它也是不能单用直尺和圆规来解决的。但在开俄斯有一位天才数学家希波克拉底(公元前 430 年享有盛名)曾研究过相似三角形和比例理论,指出这个问题可以归结为求两直线之间两个比例中项的问题,这两条直线中有一条的长度是另一条的两倍。假定以 a 和 $2a$ 表示这两直线, x 和 y 代表两个比例中项,则有 $a:x = x:y = y:2a$,或 $ay = x^2, y^2 = 2ax$,从而 $y^3 = 2x^3$ 。后来人们对这个问题的解决方法,就都是尝试求两条直线之间的两个比例中项了。

但是希波克拉底最容易使人记起的一件事,就是他证明了半月形面积可以化为三角形的面积,这是把曲线形面积化为直线形面积的第一个例子。他还熟悉这样一事实:圆面积与其直径的平方成正比。由此他从一个等腰直角三角形 ABC (图 2) 出发,在三条边上各作一个半圆。

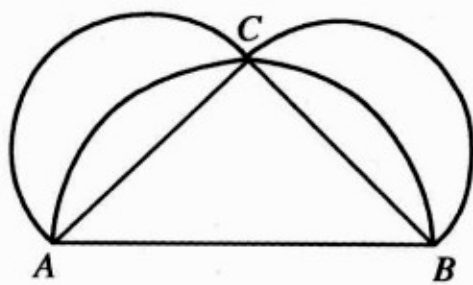


图 2

根据毕达哥拉斯定理, AB 上那个半圆的面积等于 AC 和 CB 上两上半圆的面积之和。如果现在从整个图中移去 AB 上的半圆,则留下的是两个相等的半月形。但如果从同一图中移去两个相等边上的半圆,则只剩下三角形 ABC ,所以三角形 ABC 的面积一定等于两个半月形的面积。正是由于希波克拉底证明了曲线形的面积能化为直线形的面积,才激起了他对求积问题的兴趣。

在哲人派中,安替丰和白菜生也研究过圆的求积问题。前者从一正方形出发在一圆内作内接正多边形。用不断平分弧段的办法使多边形的边不断增加,多边形的面积便逐渐接近圆的面积。安替丰相信,如果不断增加边的数目,最后一定能“耗尽”多边形和圆之间的面积,因而达到圆面积成方(求积)的目的。与他同时代的白菜生把这个问题更推进了一步,既考虑了圆内接多边形,也考虑了圆外切多边形,但是没有什么证据说明,他相信真正的面积乃是两者的算术平均值。这种方法导致完全严格但却很麻烦的穷竭法,两个世纪以后阿基米得曾十分有效地使用了它。

然而,安替丰和白菜生的结论使希腊人为之皱眉。希腊人认为,

多边形绝不可能与一个圆形完全相合,因为直线永远不能恰好落在曲线上。承认这点就意味着承认量可以无限分割,而那却是希腊人所不能接受的观点。埃利亚人芝诺使这些争论达到尖锐的地步。芝诺想出了一系列巧妙的悖论,借以批驳一条线的无限可分割性,并由此论证了运动之不可能。

这些悖论中首先是关于二分法的。运动是不可能的。飞矢在达到终点之前,必须先到达它路程的中点,但在到达中点前,必须先达到四分之一处,如此类推以至无穷。因此运动甚至不可能有开始的时候。

其次是阿基里斯和龟。飞毛腿阿基里斯比龟跑得快 10 倍,龟先开步 100 码,阿基里斯却永远赶不上它。因为当阿基里斯到达龟的起点时,他还落后 10 码,而当他再跑 10 码时,还要落后 1 码,如此类推。因此他总要落后于龟。可是经验却告诉我们,他会很快赶上龟的。

这些悖论和其他类似的悖论,使当时的数学家感到很困惑,后来也一直如此。为了避免这种二难推论,希腊人在他们的几何学中抛弃了所有关于无限小和无限大的观念。芝诺并不是数学家,但是他的批评意见却对希腊几何学方法日趋严谨起了作用,而他的悖论的解决,对以后的几何学进展一直有着深远的影响。

柏拉图及其学园 雅典的商业优势持续了半个多世纪。波斯游牧民族侵扰的危险一旦消除以后,统一就让位于不和与猜忌了。雅典与斯巴达之间的相互猜忌引起了伯罗奔尼撒战争,这场战争除了短暂的间歇之外,一直延续到公元前 404 年,那一年雅典人被迫投降。雅典人的影响虽然是衰落了,但是他们的智力却仍旧完好无损。这时期就是苏格拉底(公元前 469 年~公元前 399 年)和他的青出于蓝的弟子柏拉图(公元前 428 年~公元前 348 年)的时期。苏格拉底的主要兴趣是国家,以及如何更好地为国家服务,数学对他的吸引力极小。与此相反,柏拉图对伦理学和政治性的问题兴趣不大。他游历很广,访问过埃及和意大利南部,并且曾和毕达哥拉斯学派的人接触过,他们引起了他对数学的兴趣。因此柏拉图的哲学成了数学的哲学,这对他的同时代人和他的继承者有着深远的影响。

回到雅典后,柏拉图在城郊的一个树林中创办了一所学园,世人称为柏拉图学园。为了使学学生绝不怀疑他对数学的重视,他叫人在校

门口挂上一块字牌,禁止不懂几何学的学生入内。

和毕达哥拉斯一样,柏拉图也认为打开宇宙之谜的钥匙是数和形。对他来说,神不断在从事几何作图,因此在研究哲学之前首先必须研究几何学。所以我们发现他对严谨性是明显地加以强调的。鉴于毕达哥拉斯学派在其对点、线等的定义上所遭遇到的困难,他就着手去澄清这些基础本质。点不再是构成平面和立体图形的基本“砖块”了,点只是线之端,线是面之界,等等。柏拉图有许多定义,也可能有一两条公理曾被欧几里得采纳到他的《几何原本》中。

虽然柏拉图的主要兴趣是在几何学,但他对算术即关于数的科学也极为重视。在他的著作中,特别是在《共和国》一书中,他热烈主张这门学科具有极大的提高思维能力的作。用。确定构成直角三角形的一组长度的一种最早的系统性方法,应当归功于他。他曾指出,其长度以数字 $(n^2 - 1)$, $2n$ 和 $(n^2 + 1)$ 表示的三条线构成直角三角形。他还发展了分析的证明方法,来代替希腊人所常用的综合法。在分析法中,假定结果是真的,而研究者以此作为出发点,推论到一个已经确立了真理。因此这种方法是否有效要看各个分析步骤是否可逆。

在柏拉图学园的有力影响下,数学继续得到了发展。学园对数学发展的推动作用是很的,它的主要传统就是更加注意严谨。雅典的铁塔斯(公元前 480 年前后)是苏格拉底的弟子,学园的一个重要人物,对不尽根的理论作出了贡献。他还写了一本关于五种正立方体的著作。他是否已能证明仅仅存在五种正立方体,这还不能肯定,但相信他是能证明的,否则就不会有什么需要他去发现的了,因为完全可以肯定这五种立方体远在更早的时候就已为人所知。欧几里得《几何原本》第十卷中的主题有很多地方应归功于铁塔斯。属于后期毕达哥拉斯学派的泰兰潭的亚及他斯表现出对基本平面几何和立体几何的异常精通。他还研究力学,这是希腊人所一直忽视的。亚及他斯又想出了一种用两条相交曲线解决倍立方问题的巧妙办法。

柏拉图学园里最著名的人物之一,就是奈达斯地区的欧铎克色斯(公元前 408 年 ~ 公元前 355 年)。他发展了一般的比例理论,并且把它加以推广,使之包括一种新型的数——无理数。他在这个问题上的大部分工作已被欧几里得收集到《几何原本》第五卷中。他发展了穷竭法,这在数学进展中同样是重要的。这项成就使他在微积分的发明中享有很高声誉。他用这种方法证明了圆锥体和棱锥体的体积各为

同高和同底的圆柱体和棱柱体体积的三分之一。这种在希腊数学中曾经起过重要作用的方法是十分严谨的,它的基础是欧几里得在其《几何原本》第十卷开头所说明的那条公理。由于避免了关于无限小的困难,使得欧铎克色斯能以希腊人可以接受的方法提出他的论证,这就是他对普及这种方法的贡献。直到晚近,数学家找到了麻烦较少的方法以后,才放弃使用这种方法。

柏拉图死后,学园的领导人是柏拉图的侄儿,雅典的彪西波,后来是加尔西顿的色诺克拉底,两人都是有名的数学家。他们的工作主要是把已经知道了的东西加以系统化,很少引进新方法。学园成立后的整个时期,是一个非常重要和丰富多彩的时期。学园的影响延续了好几百年,这主要是由于它的成员们的热忱。事实上,一直到公元 529 年查士丁尼皇帝认为它是异说的中心而下令封闭它以后,柏拉图所创设的这个学园才停止了活动。

这里必须提一下亚里士多德(公元前 384 年~公元前 322 年),他是柏拉图学园里的学生,是一位真正渊博的学者。虽然他主要的不是一个数学家,但他极为重视数学,由于他人们才了解公理、公设和定义之间的明显区别。他对无限大和连续性也有明确的见解。他对当时的欧铎克色斯和其他几何学家的著作似乎都很熟悉,在他的著作中发现有许多重要的几何学的定理,例如多边形的外角之和等于四直角,在包围给定面积的所有平面图形中,以圆的周长为最小。在力学方面,他奠定了某些原理,这些原理虽然是错误的,但却一直保持到 16 世纪。

亚历山大学派 在公元前 338 年查罗尼亚战役中,马其顿的菲力浦使雅典人一败涂地,从此雅典城再也没能复兴起来。两年后菲力浦去世,由其子亚历山大大帝继位。新国王立即着手征服已知的世界。公元前 332 年,他侵吞了埃及,在尼罗河畔建立了亚历山大城。他在九年之后去世,接着便是大混乱和内讧。广阔的国土被他的将领们所分割,在分赃中,埃及落在一个绰号叫做救世主的托勒密手中。和亚历山大一样,托勒密也在亚里士多德门下学习过,并且似乎也从老师那里学到了好学精神。他把亚历山大定为国都,在他的影响下,亚历山大很快成为古代世界的文化中心和商业中心。在这里建立起了现代大学的前身、著名的博物馆及宏伟的图书馆。艺术和科学都受到热

情的培育。公元 641 年亚历山大遭到了阿拉伯人的洗劫,在此之前的一段时期,为时几达千年,它一直是无可争辩的学术中心。

当时许多学者都为这座繁荣的城市所吸引,其中有三个人决定了此后数百年数学的进程。首先是欧几里得。由于他,几何学从一团没有联系和未予严谨证明的定理变成了一座建立在巩固基础上的巍峨大厦。不到 100 年以后,阿基米得和阿普罗尼亚斯又把几何学提高到无可超越的水平,直到 17 世纪为止。

关于这些先驱者的生平,人们确实知道得很少。从《欧德摩斯摘要》一书中,我们得知欧几里得大约是在公元前 300 年崭露头角的,而他赖以成名的《几何原本》一书,大约是在公元前 320 年编成。这本著作是如此著名,以至我们只须略作一下介绍。一直到现代,它还被认为是研究几何学的入门书。

《几何原本》一书是从一系列定义、公设和“共同概念”开始的,这些“共同概念”后来被称为公理或自明真理。原先只有 5 条公设,头 3 条是关于作图的。这 3 条公设是:

1. 连接两点可以作一直线。
2. 直线的两端可以任意延长。
3. 可以作一圆,具有给定的中心和给定的半径。

第四条公设是说所有的直角都相等,第五条是欧几里得赖以建立其全部关于平行线的理论的,这个公设指出:“如果一条直线落在另外两条直线上,且在割线一侧所成之两内角之和小于二直角,那么,只要在小于二直角的这两个内角所在的割线那一侧延长这两条直线,它们就会相交。”

欧几里得试图根据这些定义、公理和公设,以绝对严谨的方式建立起几何学知识的整个大厦。在他以前,也有人设想过同样的计划,但是正如《欧德摩斯摘要》一书中所说,“把几何学原理联系到一起,把欧铎克色斯的许多定理有次序地安排起来,把铁塔斯的许多定理加以完善化,并对前人未经严谨证明的许多东西给以无可争辩的阐明”的,乃是欧几里得。

《几何原本》第一卷所讨论的,是关于直线和由直线构成的平面图形的几何学。第二卷建立了许多人所共知的代数恒等式。由于没有代数符号,希腊人只能依靠几何学方法证明它们。这两卷的内容很少是毕达哥拉斯学派所不知道的。

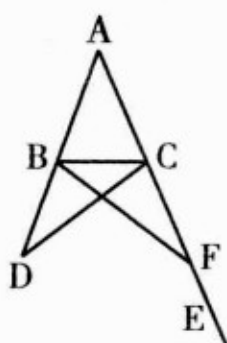
Liber I.

11

Item, sub aequalibus rectis lineis contentum, & basim BC basi EF aequalem habebunt; eritque triangulum BAC triangulo EDF aequale, ac reliqui anguli B, C reliquis angulis E, F aequales erunt, uterque utriusque, sub quibus aequalia latera subtenduntur.

Si punctum D puncto A applicetur, & recta DE rectae AB superponatur, cader punctum E in B, quia $DE^a = AB$. Item recta DF cadet a byp. in AC, quia ang. $A^a = D$. Quinetiam punctum E puncto C coincidet, quia $AC^a = DF$. Ergo rectae EF, BC, cum eodem habeant terminos, b congruent, & proinde aequales sunt. b 14. ax. Quare triangula BAC, EDF; & anguli B, E; itemq; anguli C, F etiam congruunt, & aquantur. Quid erat Demonstrandum.

PROP. V.



Isoscelium triangulorum ABC qui ad basim sunt anguli ABC, ACB inter se sunt aequales. Et productis aequalibus rectis lineis AB, AC qui sub base sunt anguli CBD; BCE inter se aequales erunt.

b^a Accipe $AF = AD$, & a 3 r. junges CD, ac BF. b 1. p. ff.

Quoniam in triangulis ACD, ABF, sunt $AB^c = AC$, & $AF^d = AD$, d const. angulusq; A communis, erit ang. $ABF = ACD$; c 4. 1. & ang. $AFB^e = ADC$, & bas. $BF^e = DC$; item $FC^f = DB$. ergo in triangulis BFC, BDC erit ang. $FCB = DBC$. Q. E. D. Item g 4. 1. ideo ang. $FBC = DCB$. atqui ang. $ABF^h = ACD$. ergo ang. $ABC^k = ACB$. Q. E. D. k 3. ax.

Corollarium.

Hinc, Omne triangulum aequilaterum est quoq; aequiangulum.

PROP.

欧几里得对这一定理的证明：等腰三角形的两底角相等，若再延长相等的二边，则在底边另一侧的两角也相等。引自巴罗著《欧几里得》一书。（蒙皇家学会赐予转载）

第三卷讨论圆的性质，其中有许多在哲人派试图解决求圆面积问题时就已发现了。第四卷继续讨论圆的几何学，特别提到了某些圆内接和圆外切的直线图形方面的问题。命题 10 指出了如何作一等腰三

角形,使其每一底角均为第三角的两倍。这个命题是毕达哥拉斯学派早已知道的,他们曾利用它来作成正五边形。在使用这种方法时,要按照中末比来分割(黄金分割)一条直线,这肯定也是毕达哥拉斯学派所知道的。

第五卷详细探讨了关于比例的理论,并且把它推广到各种量,此外还证明了它既可以应用到可通约的量,也可以应用到不可通约的量。希思认为,希腊数学中没有什么更好的发现比这个理论更能令人夸耀了。^①一般都公认,该卷中大部分是欧铎克色斯和铁塔斯的工作,但是把它们编排得合乎逻辑次序,应该归功于欧几里得。书中关于比值和比例的基本概念是这样定义的:

各个量在被乘时仍能保持各量间的相应比数称为彼此间有一比值。(定义4)

所谓成等比的诸量,如第一量与第二量之比等于第三量与第四量之比,是指在以任何等倍数乘第一量与第三量,并以任何等倍数乘第二量和第四量时,前者的等倍数必相同地大于,或相同地等于,或相同地小于后者的相应的等倍数。(定义5)^②

成等比的诸量称为比例量。(定义6)

第六卷把第五卷中已经建立起来的关于比例的一般理论应用到平面图形上去。

第七、八、九卷与算术即关于数的理论有关。单位的定义是,用它把每个存在的事物称为一。奇数和偶数、素数和合数、平方数和立方数、完全数等都有了定义,例如一个完全数就是“等于它的各部分之和的数”,即等于它的所有因子(包括1)之和。第七卷中的命题1指出,“若在两个不等数中,每当从大数中尽可能地减去小数,再从小数中尽可能地减去所得余数,又从前一余数中尽可能地减去下一余数,如此下去,并且任何余数都不是前一余数的约数,直至达到1为止,则此二

① Heach, *Greek Mathematics*, 第一卷, 384 页。

② 用现代的语言叙述是,设 p, q 和 p', q' 为成比例的两对线段:

$$p : q = p' : q'$$

用有理分数 $\frac{m}{n}$ 乘这个比例式,得到

$$mp : nq = mp' : nq'$$

由此导出三种可能性:(i)若 $mp > nq$, 则 $mp' > nq'$; (ii)若 $mp = nq$, 则 $mp' = nq'$; (iii)若 $mp < nq$, 则 $mp' < nq'$ 。——译注

给定数互为素数”。这个命题是用归谬法来证明的,从它可以得出求不是互素的两个或三个数的最大公约数的方法。第七卷的其余部分是讨论素数的性质,其中包含下列命题:

1. 若两数对任一数为素数,则它们的积对该数也为素数。(第七卷,命题 24)

2. 若两数互为素数,则两数之和对两数中任何一数也互为素数,又若两数之和对两数各为素数,则原来两数互为素数。(第七卷,命题 28)

3. 任一合数均可用某个素数相约。(第七卷,命题 31)

4. 任何数要么是素数,要么可以用某个素数相约。(第八卷,命题 32)

最后七个命题导出求两个或两个以上数的最小公倍数的方法。

第八卷主要是研究有关连比例数的定理。该卷指出如何在两个数之间插入若干几何中项,并且证明了如果两个数 a 与 b 之比等于另外两个数 c 与 d 之比,且 a 与 b 之间有 n 个几何中项,则在 c 与 d 之间也有 n 个几何中项。欧几里得还证明了:

1. 如果一系列数成连比,则它们的平方,立方等也成连比。(第八卷,命题 13)

2. 在两个平面数(即平方数)中,只存在一个几何中项,而在两个立体数(即立方数)中,只存在两个几何中项。

3. 如果三个数成连比,而第一个数是平方数,则第三个数也是平方数。(第八卷,命题 22)

4. 如果四个数成连比,且第一个数是立方数,则第四个数也是立方数。(第八卷,命题 23)

第九卷继续讨论第八卷中的问题。该卷发展了素数的理论,并且指出素数的个数是无限的。“素数比任何指定的数目都多。”(第九卷,命题 20)命题 8 是一个有趣的定理:“若从 1 起有任意多个数成连比例,则从单位数起,第 3,第 5,第 7,……个数是平方数,而第 4,第 7,第 10,……个数是立方数。若从单位数起有任意多个数成连比例,而紧接着单位数的是一个平方数(或立方数),则其余的数都是平方数(或立方数)。但如果在该系列数中,第一个数后面的不是平方数,那就只有第 3,第 5,第 7,……个数是平方数。又如果第一个数后面的不是立方数,那就只有第 4,第 7,第 10,……个数是立方数。”(第九卷,命题 10)接

着便是后来以算术中一个基本定理闻名的定理,这个定理就是:一个数能以一种方式并且只能以一种方式分解为若干素因数的乘积。欧几里得是这样来说明这个重要定理的:“如果一个数是能以若干素数通约的最小数,则除了原来的素数以外,它将不能用其他任何素数相约。”(第九卷,命题 14)命题 35 提出了一种巧妙方法来求几何级数的和:如果有任意多个数成连比例,并且第二个数与最后一个数都可以减去第一个数,则第二个数的增量与第一个数之比,将等于最后一个数的增量与最后一个数前面的所有数之和的比。例如,若级数是

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}$$

且

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \dots = \frac{a_2}{a_1}$$

即

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = \dots = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$$

现在,如果有任意多个数成连比例,则由于任一前项与后项之比等于所有前项的和与所有后项的和之比(第七卷,命题 12),故将所有前项与所有后项相加,即得:

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_n + a_{n-1} + \dots + a_1} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$$

从这个关系即可确定 S_n , 即 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ 。但欧几里得实际上没有用这个方法求几何级数的和,而是用它来建立确定完全数的法则,命题 36 说明了这个法则:如果从单位开始有任意多个数连续成倍比,直到所有各数之和成为素数,并将这个和乘以最末数得出某数,则乘积一定是完全数,亦即如果下一和式是素数:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$$

则

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n)2^n$$

是完全数。例如, $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$, 那么 31 是素数。因此 31×16 或 496 是完全数。496 的因数是 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 它们之和是 496, 这证明上述法则是正确的。

第十卷讨论无理数,通常认为这一卷是欧几里得的杰作。德·摩根认为第十卷最为完美,远非其他各卷甚至第五卷所能比拟。该卷内容大都属于铁塔斯的工作,但也要归功于欧几里得,因为他把整个内容按逻辑次序编排了起来。该卷一开始就给可通约数与不可通约数、有理直线和无理直线等下了定义。“能为同一约数相约的数称为可通约数,不能有任何共同约数的数称为不可通约数。”(定义 1)“如有若干

Liber X.

193

Axiomata.

Magnitudo quotcunque magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.

2. Magnitudo quaecunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem quam illa metitur.

3. Magnitudo metiens totam magnitudinem & ablatam, metitur & reliquam.

PROP. I.

Duabus magnitudinibus inequalibus AB, C propositis, si à majore AB auferatur majus quàm dimidium, (AH) ab eo (HB), quod reliquum est, rursus detrahatur majus quàm dimidium (HI), & hoc semper fiat; relinquetur tandem quaedam magnitudo IB, quæ minor erit propositâ minore magnitudine C.

Accipe C toties, donec ejus multiplex DE proximè excedat AB; sintque $DF = FG = GE = C$. Deme ex AB plusquam dimidium AH, & à reliquo HB plusquam dimidium HI, & sic deinceps, donec partes AH, HI, IB æquæ multæ sint partibus DF, FG, GE. Jam liquet FE, quæ non minor est quàm $\frac{1}{2}$ DE, majorem esse, quàm HB, quæ minor est, quàm $\frac{1}{2}$ AB \neg DE. Paritèrque GE quæ non minor est quàm $\frac{1}{2}$ FE, major est quàm IB \neg $\frac{1}{2}$ HB. ergò C, vel GE \sqsubset IB. Q. E. D.

Idem demonstrabitur, si ex AB auferatur dimidium AH, & ex reliquo HB rursus dimidium HI, & ita deinceps.

S

PROP.

欧几里得对其书中 X,1 的证明引自巴罗: *Euclid's Elementorum Libri XV, breviter Demonstrata* 一书。(蒙皇家学会赐予转载)

直线,若以每一直线为边构成的诸正方形能以同一面积相约,则此诸直线称为平方可通约直线;而如果这些正方形不可能用任何面积来通约,则此诸直线称为平方不可通约直线。”(定义 2)在这些定义下,欧几里得证明了与给定直线可通约与不可通约的直线分别有无限多条,其

中有些只是本身与这条给定直线可通约或不可通约,其他一些则是本身及其平方都能与这条直线通约或不可通约。“如果给定一直线称为有理直线,则与它可通约的所有直线,不论是本身及其平方同时与它可通约,或仅仅是其平方与它可通约,都称为有理直线,而所有本身或平方不能与它通约的直线,称为无理直线。”(定义3)^①

命题1提供了穷竭法的基础,这种方法早就为欧铎克色斯用过,但到了欧几里得,他已能随心所欲地用它。这个问题可说明如下:取二不等量,若从大量中减去一个大于或等于它本身一半的量,再从余量中减去大于或等于这余量一半的量,并且不断重复这一程序,则最后剩下的,将是一个比所取二量中较小的一个还要小的量。他的证明如下。

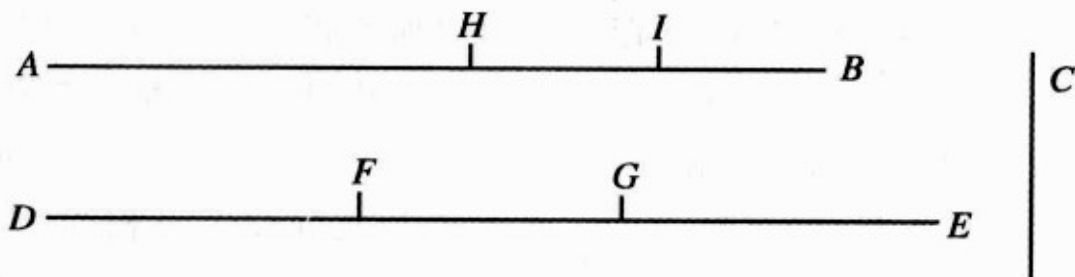


图3

令 AB 与 C (图3) 为二给定的不等量, AB 大于 C , 同时 C 的某一倍数会大于 AB 。令 DE 是 C 的倍数, 它大于 AB 。将 DE 分成几部分

^① 希思爵士曾经很清楚地解释过这里所用名词的意义。“‘平方可通约的’这一术语相当于柏拉图使铁塔斯称之为平方根亦即不尽根的意思。如果 a 是任一直线, 则 a 和 $a\sqrt{m}$ 或 $a\sqrt{m}$ 和 $a\sqrt{n}$ (m, n 都是整数, 或约至最简的算术分数, 可为真分数, 亦可为假分数, 但非平方数) 是只能平方可通约的。按照欧几里得的说法, 所有本身可通约的直线, 也是平方可通约的, 但不是所有平方可通约的直线都能本身可通约。另一方面, 平方不可通约的直线一定也是本身不可通约的, 但不是所有本身不可通约的直线都平方不可通约。事实上, 只能平方可通约的直线, 本身是不可通约的, 但显然不是平方不可通约。有理的: 我们可以取任一直线并称之为有理的, 然后相对于这条取为有理的直线, 把其他直线或称为有理的, 或称为无理的。对于欧几里得说来, 不仅一条本身可与一有理直线通约的直线是有理的, 而且一条只能与一有理直线平方可通约的直线也是有理的。那就是说, 若 P 是一有理直线, 并且 m 和 n 是整数, $\frac{m}{n}$ 是最简分数而非平方数, 则不仅 $\frac{m}{n} \cdot P$ 是有理的, 而且 $\sqrt{\frac{m}{n}} \cdot P$ 也是有理的……无理直线在欧几里得看来乃是本身及其平方都不能与所取有理直线通约的。若 K 不是平方数, 则 $\sqrt{K} \cdot a$ 就不是无理的。”(希思:《欧几里得》, 第三卷, 11~12页。)

DF, FG, GE , 各与 C 相等。从 AB 割去大于它本身一半的 AH , 再从剩下的 HB 割去大于本身之一半的 HI , 这样不断继续下去, 直到 AB 的分段数目与 DE 的分段数目相等。

设 AH, HI, IB 为 AB 的分段, 其段数与 DF, FG, GE 的段数相等。由于 DE 大于 AB , 并从 DE 已经割去了小于其一半的 EG , 从 AB 已经割去了大于其一半的 AH , 所以剩下来的 GD 大于剩下来的 HB 。

因为 GD 大于 HB , 并且从 GD 已经割去了其一半, 即 FG , 从 HB 已经割去了大于其一半的 HI , 由此可知剩下来的 DF 大于剩下来的 IB 。但 DF 等于 C , 故 C 大于 IB , 即 IB 小于 C , 亦即剩下来的量小于给定二量中较小的量, 这就是所要证明的。

我们将看到, 欧几里得要靠这个定理来证明(第十二卷, 命题 2)诸圆的面积之比等于各以它们的直径为边所作的正方形的面积之比。但他还立即在接着的一个命题里应用了这个定理, 作为他的检验两个量是否可通约的方法的基础。这个命题是: 若取二不等量, 不断地依次从大量减去小量, 并且剩下的永远不能与它前面的量相约, 则此二量不可通约。再下面的两个命题指出如何确定两个或三个量的最大公约数。确定的方法使人想起第七卷命题 2、命题 3 中所用的方法, 那个方法是确定两个或三个数的最大公约数的。

往下的 4 个命题是讨论可通约量和不可通约量的性质。可通约量彼此之比应可表为一个数与另一数的比; 而当二量之比可以表为一个数与另一数的比时, 这两个量就可通约。(第十卷, 命题 5、6)不可通约的量彼此不能表为一个数与另一数之比。而当两个量彼此不能表为一个数与另一数之比时, 这两个量就不可通约。(第十卷, 命题 7、8)由此可以证明(第十卷, 命题 9): 以本身可通约的诸直线为边所作的正方形, 彼此之间的比可表为一个平方数与另一平方数之比; 而正方形彼此之间的比若能表为一个平方数与另一平方数之比, 则它们的边也就是本身可通约的。但以本身不可通约的诸直线为边所作的正方形, 彼此之间的比并不能表为一个平方数与另一平方数之比; 而当诸正方形彼此之间的比不能表为一个平方数与另一平方数之比时, 它们的边就不能是本身可通约的。这个定理的证明要归功于铁塔斯。

命题 10 指出如何求出两条直线与给定的直线不可通约, 其中一条仅仅是本身与它不可通约, 另一条同时还与它平方不可通约。命题 11 则证明了, 如有 4 个量成比例, 并且第 1 个量与第 2 个量可通约, 则

第3个量与第4个量也可通约;若第1个量与第2个量不可通约,则第3个量与第4个量也不可通约。因此我们就有一个定理,若以代数语言来表示,这个定理就是:二次方程 $ax - x^2 = \frac{1}{4}b^2$ 的根与 a 能否通约,要看 $\sqrt{a^2 - b^2}$ 与 a 能否通约。

接着就是对无理直线加以精密分类,这一工作是从命题 21 开始的。命题 21 说:只能平方可通约的诸有理直线所围成的长方形是无理的,与之相等的正方形之边也是无理的。后者可称为中位量的。在其后的命题中,欧几里得研究了可以表为 $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ 的各种可能直线,其中 a 和 b 表示两条可通约的直线。命题 28 的一个引理指出如何求两个平方数,使得它们的和也是一个平方数,另一个引理指出如何求两个平方数,使得它们的和不是平方数。

第十一卷至第十三卷专门讨论立体几何学。第十一卷把平面直线和平面角的几何学推广到平面和平面所构成的角上。立体角的定义是由两个以上的平面角所包围的角,这些平面角不在同一平面内,但都是从同一点作出的。由此可以证明:1. 若一立体角是由三个平面角包围而成,则其中任何两个角之和大于第三角。2. 构成任何一立体角的诸平面角之和小于四直角。该卷的其余部分讨论了立体图形的性质,其中有平行六面体、圆锥体、球体。后两种立体图形被定义为旋转体,因此球的定义就不是与一固定点成等距离的空间诸点的轨迹,而是使一个半圆的直径保持固定,把这个半圆绕转一周而回到其初始运动的位置时,这样描出的形状就是球。和他的许多继承者一样,欧几里得所认识到的唯一的圆锥体乃是直圆锥体,由于这种立体在圆锥曲线几何中起着重要作用,所以我们把欧几里得对它所下定义的全文引出来:“使直角三角形的一个直角边保持固定,把这个三角形旋转一周并回到其初始运动的位置,这样描出的形状就是圆锥体。而当保持固定的直线等于旋转一周运动的一条直角边时,这圆锥体就是直角圆锥体;如果小于该直角边,它就是钝角圆锥体;如果大于该直角边,它就是锐角圆锥体。”(定义 18)

第十二卷中自由地使用了穷竭法。它被用来证明:

1. 诸圆之内接相似多边形彼此之比,等于在诸直径上作出的正方形彼此之比。(命题 1)
2. 诸圆彼此之比,等于在其直径上作出的正方形之比。(命题 2)

3. 底面为三角形,高相同的诸棱锥体彼此之比,等于它们的底之比。(命题 5)

4. 同高的圆锥体彼此之比,和同高的圆柱体彼此之比,等于它们的底之比。(命题 11)

5. 圆锥体的体积是外接圆柱体体积的三分之一。(命题 10)

6. 相似圆锥体(和圆柱体)彼此之比,等于它们的底的直径的三次方之比。(命题 12)

7. 诸球彼此之比,等于它们的直径的三次方之比。(命题 18)

欧几里得对其中第二个命题的证明步骤进行如下。设 $ABCD$, $abcd$ 为二圆; BD , bd 是它们的直径,若圆 $ABCD$ 的面积与圆 $abcd$ 的面积之比不等于 BD^2 与 bd^2 之比,则 BD^2 与 bd^2 之比将等于圆 $ABCD$ 与某一大于或小于圆 $abcd$ 的面积之比。

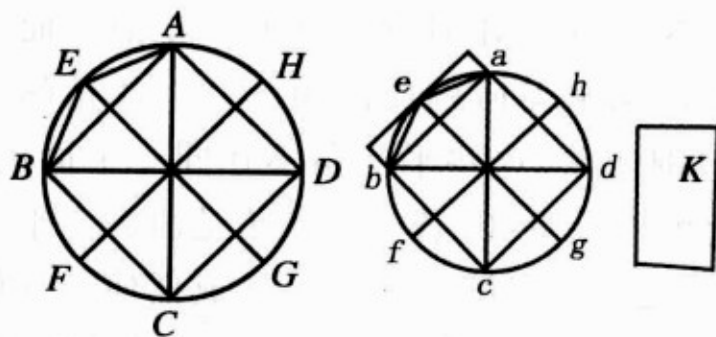


图 4

(1) 设 BD^2 与 bd^2 之比等于圆 $ABCD$ 与一较小面积之比,令此较小面积为 K 。在圆 $abcd$ 内作正方形 $abcd$ 。(图 4)

通过 a, b, c, d 各点作圆的切线,于是构成一圆外切正方形,并且它的面积将是正方形 $abcd$ 的面积的二倍。

但由于圆的面积小于其外切正方形的面积,所以内接正方形的面积大于圆 $abcd$ 的面积的一半。

但由于圆的面积小于其外切正方形的面积,所以内接正方形的面积大于圆 $abcd$ 的面积的一半。

现在将弧 ab, bc, cd, da 在 e, f, g, h 处平分,并连接 $ae, eb, bf, fc, cg, gd, dh, ha$ 。在 e 点作切线,于是在 ab 上完成了一个长方形。

这长方形是三角形 abe 的两倍,由于弓形 aeb 小于这长方形,所以三角形 abe 大于弓形 aeb 的一半,同理,对于弓形 bfc 等等也有类似结果。

现在,如果把剩下的诸弧例如 ae 再予以平分,并且再把它们的中点同 a 和 e 这些点连接起来,最后就会得到一些弓形,其面积小于圆 $abcd$ 的面积与面积 K 之差。因此按照第十卷中的命题 1,所得到的多边形 $aebfcgdh$ 就大于面积 K 。现在再在圆 $ABCD$ 内作内接多边形 $AEBFCGDH$,它与多边形 $aebfcgdh$ 相似。

于是多边形 $AEBFCGDH$ 的面积:多边形 $aebfcgdh$ 的面积 $= BD^2$:

bd^2 。(第十二卷,命题 1)

但 $BD^2:bd^2 = \text{圆 } AEBFCGDH:K$

因此 $\text{圆 } AEBFCGDH:K = \text{多边形 } AEBFCGDH:\text{多边形 } aebfcgdh$

所以 $\text{圆 } AEBFCGDH:\text{多边形 } AEBFCGDH = K:\text{多边形 } aebfcgdh$

但因为圆 $AEBFCGDH$ 大于其内接多边形,所以面积 K 大于多边形 $aebfcgdh$ 的面积。

但由假设,它也小于多边形 $aebfcgdh$ 的面积,因此这是不合理的。

(2)通过同样的推理可以证明,圆 $ABCD$ 与一个大于圆 $abcd$ 的面积之比,不可能等于 BD^2 与 bd^2 之比。

第十三卷说明了如何作出五种“球内包的”正立体,即四面体、立方体、八面体、十二面体和二十面体。作这些“球内包的”立体,意思就是求它们的外接球,也就是要建立立体的边(棱)与球的半径之间的关系。欧几里得通过巧妙的推理过程确立了下列结果,其中 r 是球的半径:

$$\text{四面体的边} = \frac{2r\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{八面体的边} = r\sqrt{2}$$

$$\text{立方体的边} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{十二面体的边} = r \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3}$$

$$\text{二十面体的边} = r \frac{\sqrt{10(5 - \sqrt{5})}}{5}$$

欧几里得还证明了,“除了上述五种图形外,不可能作出任何其他图形由彼此相等的等边、等角图形所包围”。

第十四卷包括 8 个命题,这一卷只不过是第十三卷的补充,人们一直认为它是公元前 2 世纪喜西克利斯的贡献;第十五卷可能是大马士革的工作,价值不大,但通常都把这两卷包括在《几何原本》中。

欧几里得的其他著作 如普罗克洛斯所说,“欧几里得还有其他许多出色的著作,它们都异常精确,充满了科学研究成果”。在欧几里得的其他著作中,属于纯粹几何学方面的唯一留存的著作是《参考书》,这是一本收集了 94 个习题的习题集,目的是要帮助读者获得解

题的某些技巧。它对当时的几何学知识宝库并没有增加什么新内容。另一本著作《论除法》已经在 1851 年出版于巴黎的一本阿拉伯文教科书中保存下来。12 世纪时克雷莫那的杰勒德曾把它从阿拉伯文译成拉丁文,这个译本是中世纪的学者所知道的。它所讨论的问题是如何用一条直线把一给定平面图形分割成若干彼此有一定比例(包括相等)的部分。阿基米得还提到过一本四卷本的关于圆锥曲线的著作,它好像已经概括了阿普罗尼亚斯头四本关于圆锥曲线的著作中的大部分题材。欧几里得的其他著作还有《现象学》和《光学》,前者是一本讨论球素几何学的论文集,可能是为了帮助天文学研究而编成的;后者一直保存了下来,也许可以认为它是欧几里得企图建立关于光在球面上反射的基本原理的最早尝试。欧几里得在这本书中已经注意到,前人在平面镜情况下早已认识到的入射角和反射角相等的事实,在反射面为球面的情况下仍然正确。

但是,欧几里得的名声仍然是由于《几何原本》这本书。尽管这本书的流传很广,但它不是毫无缺点的,欧几里得涉及到的范围虽然甚广,但有许多重要的命题在书中却找不到。有些重要命题出现在《参考书》中,还有些则为后来的作者所补充了,例如阿普罗尼亚斯和托勒密等人。《几何原本》中没有求积法。各种直线形面积之间的关系(例如平行四边形、三角形等)和不同立体图形体积之间的关系(例如平行六面体、棱锥体等)虽然已有清楚地说明,但我们在任何地方都找不到这些图形的面积和体积的表示式。欧几里得虽然证明了圆的面积和它们直径上的正方形成正比,但没有指出如何去求圆的面积,更不用提圆周与直径的比了。

欧几里得的目的是要用一些定义、公理和公设来建立他的几何学的整个结构。第四公设和第五公设无论在古代还是现代都经常受到攻击。人们认为第四公设——所有的直角都相等——可以用重叠法来证明。欧几里得很可能也知道这点。但他如果承认这点,他就得假定几何图形在移动时大小和形状不变,因为他马上在证明两个三角形全等的定理(第一卷,命题 4)时要用到这个原理。实际上,他在第四公设中所假定的就是几何图形在移动时不变。

著名的平行公设(在现代版本中是公理 12)也遭到许多批评。从托勒密起,人们一直在尝试证明它,但都失败了。仅当人们了解到可以发明一种证明这条公设无效的几何学时,才放弃了这些尝试。并不

是有谁在怀疑这条公设的真理性,重要的是,它并非像一般公理所应有的情形那样是显然自明的。1733年,萨开里决心要“除去欧几里得所有的污点”(Euclides ab omni nœcevo vindicatus),他对欧几里得所提解释的健全性具有如此坚强的信念,以至他坚信自己已经获得了成功。晚近,罗巴切夫斯基、黎曼、鲍耶等人也研究过无需平行公理的其他几何学系统问题。

欧几里得给予几何学研究的推动力,在整个公元前3世纪主要是由阿基米得和阿普罗尼亚斯保持下来的。但是,关于数论的研究却无人对它感兴趣,直到将近400年后尼科马卡斯的出现,才有了对这门学科感兴趣的人。几何学一直吸引着人们注视数学,在不到100年中,它已经上升到甚至比欧几里得所曾达到过的更高的高峰。

阿基米得(公元前287年~公元前212年) 一直被称为古代最伟大的数学家。他生于叙拉古,但可能在亚历山大学过数学。后来他回到故乡,在那里由于他提出了抗击罗马人进攻的计划,而使他声誉大增。但他自己对于和实际需要有关的发现,却并不怎样重视。他最珍视的是他在纯数学中的发明。

这些发明涉及的范围很广,也说明他对前人在数学中的一切发现具有渊博的知识。在几何学方面,他补充了许多关于平面曲线图形求积法和确定曲面所包围体积方面的独创研究。在这些研究中,他预见到了极微分割的概念,这个概念以后在17世纪的数学中起了非常突出的作用,并且它本身就是微积分的先声。但他缺乏关于极限的概念。虽然如此,他在研究那些今天要求用微积分来解决的问题上还是获得了若干惊人的成就。在力学方面,他也建立了某些基本原理,并在流体静力学这门学科上进行了开端的工作。

阿基米得著名的理论包括:

1. **平面平衡** 其中有15个命题,它大概是关于力学的最早的科学论文,可以说是力学这门科学的肇始。亚及他斯和其他人曾研究过杆杠、尖劈,可能还研究过滑轮,但要是说在阿基米得的论文出现以前,有关原理就已经有了严格的证明,那就太夸大其词了。然而,阿基米得只研究了静力学,他把自己局限在可以归结为杠杆原理(“两个无论是可通约或不可通约的量,在与这两个量成反比的距离处平衡”)的那类问题上,例如确定平面图形和立体图形的重心问题。

2. 抛物线求积法 其中有 24 个命题。阿基米得研究了曲线图形求积的问题,并且用穷竭法建立了这样的结果:“任何由直线和直角圆锥体的截面所包围的弓形(即抛物线),其面积都是与其同底同高的三角形面积的三分之四。”

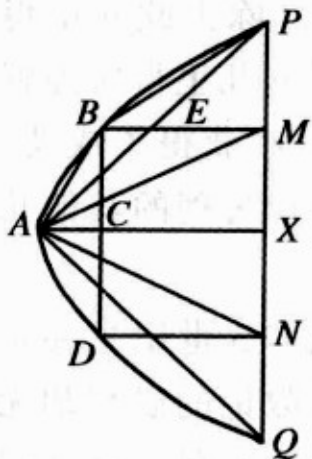


图 5

下面是他的论证稍微简化了一下的译文,可以说明他的研究方法。

APQ 是一抛物线弓形,抛物线的顶点为 A (图 5)。 PQ 交抛物线的轴于 X 点。 PX 和 QX 各在 M 和 N 处平分,作图中所示的各线段就可完成图形。

现在, $PX^2 = 4MX^2 = 4BC^2$

$$AX = 4AC, \text{ 因此 } BM = 3AC$$

又

$$EM = \frac{1}{2}AX = 2AC = 2BE$$

因此

$$\triangle BPE = \frac{1}{2}\triangle EPM$$

和

$$\triangle BAE = \frac{1}{2}\triangle EAM$$

所以

$$\triangle BPA = \frac{1}{2}\triangle PAM = \frac{1}{4}\triangle PAX \quad (1)$$

同样可以证明, $\triangle ADQ$ 是 $\triangle AXQ$ 的 $\frac{1}{4}$ 。

用同样方法重复把 PM, MX 平分就可证明(1)式的右方加上了一些三角形,其面积等于 $\triangle BPA$ 的 $\frac{1}{4}$,亦即 $\triangle PAX$ 的 $\frac{1}{16}$,等等。在这些线上不断这样作下去,就可证明抛物线弓形的面积是

$$\triangle + \frac{\triangle}{4} + \frac{\triangle}{16} + \frac{\triangle}{64} + \cdots$$

这里 \triangle 是指 $\triangle APQ$ 的面积。

如果这个级数延至无限,则不难证明其和是 $\frac{\triangle}{1 - \frac{1}{4}}$, 或 $\frac{4\triangle}{3}$ 。然而

阿基米得没有求极限的观念,所以他是用归谬证法确立起他的结论的,这种方法在于证明:如果所求面积不等于给定的面积 K ,它就一定同时大于它又小于它。而这是不合理的,由此推知抛物线弓形的面积等于

$\triangle APQ$ 面积的 $\frac{4}{3}$ 。^① 阿基米得用权重的办法从力学上证明了这点。

3. 球和圆柱 分为两卷, 总共约有 60 个命题, 通常认为这是阿基米得的杰作。开始是一系列定义和 5 个假定, 其中主要的几个假定是:

- (1) 在端点相同的所有的线中, 直线为最短。
- (3) 在周界相同的面中, 以那些周界处在平面内的平面为最小。
- (5) 在二不等量中, 如将大量超过小量之量不断加于大量中, 可以使其超过任何给定的同类的量。这被称为阿基米得公理。可以明显看出, 它类似于欧几里得第五卷中的定义 4。

由以上可以推知, 一个圆内接多边形的周长小于圆周, 并且在第 1 命题中证明了, 圆外切多边形的周长大于圆周。

这本论著包含了阿基米得最为珍视的发现, 其中包括如下几项:

- (1) 任何直圆柱曲面的面积, 等于一个圆的面积, 这个圆的半径是圆柱高和圆柱底直径之间的比例中项。(命题 13)
- (2) 圆锥曲面的面积, 等于一个圆的面积, 这个圆的半径是圆锥母线和圆锥底半径之间的比例中项。(命题 14)
- (3) 任何球面的面积, 是其中最大圆周面积的四倍。(命题 33)
- (4) 如果在球外外切一个其高等于球直径的圆柱体, 则此圆柱的体积等于球体体积的一倍半, 其总表面面积等于球面面积的一倍半。(命题 33)
- (5) 球上的任一球截形的表面积, 等于一个圆的面积, 这个圆的半径等于从球截形顶点到底周上一点所作直线的长度。这与下一定理等价: 球截形面积等于一个圆柱曲面的面积, 这个圆柱底面的半径与球的半径相同, 而高与球截形的高相同。

在对上述命题的证明中, 阿基米得已经尽可能地接近了微积分的方法, 而没有求助于极限的概念。

4. 圆的度量 其中有三个命题:

- (1) 圆的面积等于一个直角三角形的面积, 此直角三角形的两个直角边分别等于圆的半径和圆周。
- (2) 圆的面积与其直径上正方形面积之比, 近似地等于 11:14。

^① 关于阿基米得方法的详尽论述, 读者可参考希思, *Greek Mathematics*, II, 90 页。

(3) 圆周是直径的三倍大, 所大部分小于直径的 $\frac{1}{7}$, 而大于 $\frac{10}{71}$ 。他是用 96 边的圆内接正多边形和圆外切正多边形来证明这一点的。

在进行这些证明时, 阿基米得避免了用无限小量这个概念来帮助, 因为这个概念一直是希腊人所怀疑的。他考虑了内接多边形和外切多边形。他确立这个基本原理的方法是说明并证明: “给定二不等量, 则不论大量与小量之比如何接近于 1, 都有可能: (i) 求出两条直线, 使得较长的与较短的之比更小 (大于 1); (ii) 作一圆或扁形的相似外切多边形和内接多边形, 使得外切多边形的周长或面积与内接多边形的周长或面积之比小于给定的比。”然后就像欧几里得所做过的那样, 他证明如果不断把边数加倍, 最后会留下一些弓形, 它们加起来比任何指定的面积都要小。阿基米得对此还补充了一点, 即指出如果把外切多边形的边数增加到足够多, 就能使多边形的面积与圆的面积之差, 小于任何给定的面积。

5. 论螺线 在某些方面说来, 这是阿基米得对数学的全部贡献中最出色的部分。许多作者都在他的作螺线切线的方法中预见到了微积分方法。螺线的定义是这样的: “使直线的一端保持固定, 将其以等速在平面中旋转, 直至返回原处, 同时在直线旋转时, 有一点以等速自固定点沿直线移动, 这一点在平面上所描出的线就是螺线。”螺线有一个基本性质, 把矢径的长度和初始线从初始位置旋转时所通过的角度联系了起来。这个基本性质出现在命题 14 中, 现在都以 $r = \alpha\theta$ 这个方程来表示它。阿基米得然后证明了: “在第一个周转和初始线之间所包围的面积, 亦即在矢径 O 与 $2\pi\alpha$ 之间所包围的面积, 等于半径为 $2\pi\alpha$ 的圆面积的三分之一。”“我认为螺线和回到原处的直线所包的面积, 等于以该固定点作中心, 以一圈中该点沿直线所描过的长度为半径所作成的圆面积的三分之一。又如有一直线在螺线的末端与螺线相切, 并从固定端另作一直线垂直于旋转一周后返回到原处的直线, 直至与切线相遇, 我认为这样作成的与切线相遇的直线, 就等于这个圆的圆周^①。”(命题 24)

6. 劈锥曲面和椭球体 其中包括 40 个命题, 是确定由抛物线和双曲线绕其轴旋转而成的立体体积 (劈锥曲面) 以及椭圆绕其长轴和

① 这个圆的圆周指以该固定点为中心, $2\pi\alpha$ 为半径的圆的圆周。——译注

短轴旋转而成的立体的体积的。在这些命题中,阿基米得自由应用了穷竭法。

7. 浮体 这标志着流体静力学这门学科的开端。由于把数学推理应用到浮体的平衡上,阿基米得得以公式形式表述了关于浮体平衡的规律。虽然他宣称轻视机械设计,但他对流体静力学的深入研究使他发明了许多有用的装置,包括著名的扬水机。

8. 砂计算法 阿基米得设计出了一种表示大数计数系统,能表示超出当时流行的希腊计数系统所能表示的范围的数,他指出有可能选定一个数,来计数充满整个宇宙的砂粒的数目。

除了现存的著作外,据说阿基米得还编写了几本其他著作,它们涉及到的题目很广泛。他的所有名著都以精确和严谨著称,除了欧几里得是一个可能的例外以外,还找不到任何前人是这样治学的。“这些论著毫无例外地都是数学论文的里程碑。解题计划的逐步启示,命题次序的巧妙排列,严格排除与目的没有直接关联的一切东西,对整体的润饰——其完美性所给人的印象是如此之深,以至于在读者心中能产生一种近乎敬畏的感情。”^① 前面说过,阿基米得一直被称为是古代最伟大的学者,可见他的见解已经不可能更现代化了。笛卡儿和牛顿虽不是他的直接继承者,但却与他一脉相承。上面我们已经考虑过他在理论和应用两方面对数学的贡献。这些无疑都是重要的,可是这还不足以使我们对他的天才有一种切实的评价。这些与他所促成的方法比较起来,都难免要黯然失色,正是他的著作的这一方面,才博得我们最热烈的赞赏。阿基米得对当时的数学细节,表现出一种崇高的漠视态度。只要数学家在作图上受到直尺与圆规的限制,他的眼界就总是有限的。通常都把用三角形的边表示其面积的公式归功于希罗,而这个公式对阿基米得来说几乎肯定是知道了的。但对他的同时代人来说,势必要认为它是邪说异端,因为这个公式牵涉到四个长度相乘,而这是同习惯于三维欧几里得空间的概念格格不入的。如果阿基米得的继承者能表现出一些像他那样的大胆丢开三维的限制,那么,数学方面一直到了18、19世纪才被发现的東西,早就会被发现了。因此阿基米得的见解并不属于亚历山大学派,而应属于牛顿甚至高斯学派。

^① 希思, *Greek Mathematics*, 第二卷, 20 页。

帕尔加·阿普罗尼亚斯 我们从阿基米得转到帕尔加的阿普罗尼亚斯。他以他的天才获得了伟大的几何学家的声名。他约在公元前 255 年生于帕尔加,也在亚历山大学过,但后来到了帕加曼,那里有着亚历山大式的大学和图书馆。

阿普罗尼亚斯是几何学中综合法的卓越能手。他的声名是靠 *Conic Sections* (《圆锥曲线》) 一书得来的,该书共有八卷,但希腊原文本只有四卷保存下来。在中世纪发现了另外三卷的阿拉伯文译本,后来哈雷曾尝试根据他对派帕斯 *Mathematical Collections* (《数学集》) 的研究材料重编第八卷。在保存下来的几卷中,很少有什么是早期几何学家所不知道的。例如,有人认为它们和遗失掉的欧几里得论圆锥曲线的书没有什么实质上的不同。

通常都认为圆锥曲线的发现应当归功于孟尼区玛斯(公元前 350 年 ~ 公元前 300 年左右),他在尝试解决倍立方问题时,曾用双曲线和抛物线相交或两条抛物线相交的办法求得了这个问题的解。阿普罗尼亚斯的先辈,包括孟尼区玛斯在内,都把圆锥曲线看成是由垂直一母线的平面截割直圆锥面而得的截线。我们说过,欧几里得和他的追随者只熟悉直圆锥面,而要产生三种不同的圆锥曲线,就要用三种不同的锥面,它们的不同在于产生它们的三角形的顶角不同。在阿普罗尼亚斯以前,一般认为圆锥曲线是锐角锥面、直角锥面或钝角锥面的截线。具体情况要看轴线和母面之间的角是小于、等于还是大于直角的一半。阿普罗尼亚斯放弃了这种描述不同圆锥曲线的方法。与此不同,他采取了一个决定性步骤,就是证明它们都能从同一个锥面,不论是直角锥面或斜锥面得到,它们都是平行于或以任何角度倾斜于锥面的一个斜边的截线。这样,上述名称就不再有什么意义,而被阿普罗尼亚斯代之以椭圆、抛物线^① 和双曲线的名称。如以 p 代表曲线的参数(正焦弦), d 代表相应的直径,并且曲线是以直径和直径一端的切线作轴,那么,阿普罗尼亚斯的定义就可用笛卡儿坐标表示为下列方程:

$$y^2 = px \quad \text{抛物线}$$

$$y^2 = px + \frac{px^2}{d} \quad \text{双曲线}$$

① 抛物线一词早为阿基米得所用。

$$y^2 = px - \frac{px^2}{d} \quad \text{椭圆}$$

有人认为阿普罗尼亚斯熟悉坐标系的基本原理,这是极可疑的。然而有一件事也许可以肯定:假如他已掌握了这种方法,他就不会在这方面留下多少东西让费尔马和笛卡儿去发现了。

头四卷书具有引论的性质。由于阿普罗尼亚斯否定了当时公认的圆锥曲线定义,并决定把它们看成是任一直锥面或斜锥面的平面截线,所以第一卷是从锥面或锥式曲面的定义开始的。

他说,设有一个圆以及在圆平面外有一固定点。这固定点一般并不落在通过圆心垂直于圆平面的直线上。现在通过固定点作一直线,使它与圆周相接,然后使它旋转,但在旋转中永远保持与圆周相接。这样的线在两个方向上延长,就会得出一个锥式曲面。它是由两个面所组成的,这两个面彼此顶对着,并在固定点相遇,这固定点就称为顶点。通过这固定点到圆心作一直线,此直线称为轴。

从这样一个面得出三种圆锥曲线的方法,在第一卷的命题 11 到 14 中有所描述。接着是说明和证明这些曲线的主要性质。阿普罗尼亚斯无论在哪里都没有运用圆锥曲线的焦点—准线性质,他是引用直径来确立那些性质的。直径的定义是:一条平分所有平行于一给定直线的曲线弦的直线。第二卷开始是描述渐近线的性质。其中指出:由于渐近线是向无限远伸展,所以它们要与曲线越来越靠近,以至于它们相隔的距离可以小于任何给定的长度。此外还证明了,由曲线上任一点向固定方向上的渐近线作直线所围成之矩形,其面积是一定的,这相当于笛卡儿术语中应以方程 $xy = c$ 来表示的关系。接着是描述求圆锥曲线的直径、抛物线的轴、椭圆与双曲线的轴和中心的方法。最后是说明作曲线之切线的各种方法。

第三卷继续同一方面的问题,并且介绍了一些关于轨迹的问题。第四卷主要是讨论关于圆锥曲线相交的定理。第五卷是一本颇见功力之作,讨论的是现代文献中称为法线的有关内容。但是书中并没有把法线看成是垂直于切线的直线,而是看成从曲线的内点或外点所能作到曲线上的最长直线和最短直线。这部分著作以彻底的严密性著称。

阿普罗尼亚斯的盛名完全是靠他的《圆锥曲线》一书。但他还有一些其他著作。派帕斯曾援引一本叫做《截面比》的著作,另一本是《有限截面》,还有一本是《接触点和切线》。最后一本中有个著名问

题:试给定三元素,其中任一都可以是一个点、一条直线或一个圆,要求作一圆通过各给定点(如果给定的三元素皆为点的话),或者与给定的各直线或圆相切。根据给定三元素为点、线或圆的各种可能组合,这里共有 10 种不同的问题,其中大多数都是可用初等几何学来解决的。最后一个问题,即作一圆与另外三个圆相切的问题,一直到 17 世纪都使许多数学家为之绞尽脑汁。

阿普罗尼亚斯似乎还有一本论《平面轨迹》的著作。派帕斯也提到这本书。它在数学史中的重要性在于:费尔马在试图重编他的著作时,曾受到其指引而发现了坐标几何学的原理。

希腊的符号记数法 这里讲一下希腊人所用的记数制是适宜的。除了十进制以外,还没有任何关于其他记数制的证据。在最早的时期,希腊人是把数字全部写出来的。但是商业的发展需要有一种表示大数的更简洁的方法,于是逐渐发展起了另外两种记数制度。其中第一种是以单划 1 来代表单位数,它可以重复四次,以表示 1 到 4。5 是用一个新的符号 \sqcap 来表示,这是旧式的 *Pente*(五)的第一个字母,它也可以重复四次。同样,*Deka*(十)的第一个字母 \triangle 表示 10, H 代表 100, X 代表 1 000, M 代表 10 000,每个符号都可以重复四次,有时还把这些符号结合起来使用, \sqcap 和 \triangle 结合起来可以写成 $\sqcap\triangle$,表示 50; $\sqcap\sqcap$ 表示 500, $\sqcap\sqcap\sqcap$ 表示 5 000, $\sqcap\sqcap\sqcap\sqcap$ 表示 50 000。此外,这种计数方法整个是可加的,各个符号是并排写出的,大数写在前面,如 $\triangle 111$ 代表 13。通常认为这种记数方法是雅典的方法,因为雅典的碑文上常使用它。它通行于公元前 500 年至公元前 100 年左右。

这种记数方法随后又逐渐为另一种使用希腊字母的方法所代替。头 9 个字母代表 1 到 9,其次 9 个字母代表 10 到 90,最后 9 个字母代表 100 到 900。由于希腊字母只有 24 个,因此从腓尼基字母中借用了三个字 *vau*, *koph* 和 *sampi* 来补充,分别代表 6, 90 和 900。这样就可以一直表示到数字 999。至于从千数起到 9 000 是使用单位数的记号加上一撇,例如 $\prime A$ 代表 1 000。为了区别代表数目的字母与文字字母,他们使用了各种方法。有时是用点放在数字的两旁,更经常的是用一横画加在表示数字的字母上面。这种方法整个也是可加的。希腊人和古代大多数的民族一样,还没有关于位置值的知识。

这种方法可能比它以前的更简洁,但是使用如此之多的不同符

号,必然要给通常的算术运算带来很大困难。况且,它也模糊了数字之间的简单关系,例如奇数和偶数之间的区别。

公元前3世纪末,希腊数学史中最光辉的时期就此终止。欧几里得、阿基米得、阿普罗尼亚斯把数学带到了这样一种境界:除非设计出一种进步得多的记数方法,否则就不可能有什么进一步的发展了。虽然在以后的年代里一直没有出现过可与上面几位相比拟的数学家,但也不是完全没有。有些人的贡献也不是不重要的。他们的著作保存下来的不多,因此我们只能依靠地昂、亚历山大的派帕斯、普罗克洛斯和欧图西亚斯等人的评论。但就整个来说,他们的著作中很少出现独创之处。数学研究的方向逐渐转向到实用方面,而不是理论探讨方面了。大约在公元前2世纪左右,地奥克利斯发明了一种曲线,叫做蔓叶线,这使他求出了两条直线之间的两个比例中项。他的同时代人尼科马卡斯发现了蚌线,用来解决了倍立方问题。

在公元200年左右享有盛名的亚历山大的希罗,表现出了卓越的数学天才,但他所继承的是埃及传统,而不是希腊传统。他的功绩在于发明许多巧妙的力学装置,但通常认为发现用三角形三边表示其面积的公式的也是他。这个公式是 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,他在他的《几何学》一书中对此给出了几何证明。阿基米得看来也知道这个公式。希罗在这本著作中还研究了正多边形的求积法,有一部分专门讨论解二次方程的有关问题,其中一个典型问题是:已知一圆的直径、周长及面积之和,试分别决定它们。

希罗的解法如下:假定已知的和是212。将它乘以154,乘积是32 648。这个数加上841,其和是33 489。现在取其平方根($=183$)。从这个平方根减去29,余数是154。这个数的 $\frac{1}{11}$ 是14,这就是圆的直径。为了求出圆周,要从183中减去29,余数154,倍之得到308。这个数的 $\frac{1}{7}$ 是44,这是周长。在求面积时,是以周长44乘直径14,乘积为616。这个数的 $\frac{1}{4}$,即154就是圆的面积。直径、周长及面积之和是212。

如果把希罗的解法现代化,那就是设 d 为直径,并假定圆周与直径之比为22:7,而面积是 $(\frac{11}{14})d^2$,我们有

$$d + \left(\frac{22}{7}\right)d + \left(\frac{11}{14}\right)d^2 = 212$$

或
$$\left(\frac{11}{14}\right)d^2 + \left(\frac{29}{7}\right)d = 212$$

希罗用 154 去乘,使得第一项成为平方数。这给出

$$121d^2 + 638d = 32\,648$$

两端加上 29^2 即 841 而成完全平方:

$$121d^2 + 638d + 841 = 32\,648 + 841 = 33\,489$$

即
$$(11d + 29)^2 = 33\,489$$

$$11d + 29 = 183$$

因而
$$d = 14$$

由此不难得到圆周和面积。

这本著作中还有一个求一非平方数的平方根近似值的有趣方法。在确定三角形的面积时,希罗考虑的是一个其边为 7,8,9 的图形。他用他的公式求得的面积是 $\sqrt{720}$ 。由于 720 的平方根不是有理数,所以希罗就取一个最接近于 720 的平方数,这就是 729 即 27^2 。然后他将 720 除以 27,得 $26\frac{2}{3}$;加上 27,得 $53\frac{2}{3}$ 。其一半 $26\frac{5}{6}$ 非常接近于 720 的平方根。^①

尼西亚的喜帕恰斯(公元前 120 年左右)主要是一位天文学家,精确确定一年长短的就是他,此外他还解释了岁差现象。他在天文学方面的研究,使他发明了一门崭新的学科——三角学。他没有什么著作保存下来,但据亚历山大学派的地昂说,他曾编过一本 12 卷的著作,可以认为是这门学科的基础,托勒密无疑曾利用过它来制定他的弦数表。下文将叙述这一点。

① 如 A 是一非平方数, a^2 是最接近于 A 的平方数,与它只差一个量 b ,亦即 $A = a^2 + b$,则在一级近似下, $\sqrt{A} = a(1 + \frac{b}{2a^2})$ 。

第三章 三角学的发明

公元元年以后,在亚历山大,数学研究还在继续着,但人们对这门学科本身的兴趣在逐渐衰退,它逐渐成了其他学科尤其是天文学的辅助学科。这个时期的著名人物是托勒密(克劳地亚斯·托勒密),他于公元2世纪中叶享有盛名。托勒密是一位天文学家,他的伟大著作 *Syntaxis* (《句法》,后来人们称为 *Almagest*,《天文集》) 主要是天文学方面的论著。但是它在数学史中很重要,因为它可以说是三角学最早的系统性论著。有充分的理由相信,在 *Almagest* 一书中,很多内容都是喜帕恰斯所知道的,而托勒密很可能也熟悉梅内莱厄斯的 *Spharica* (《球面几何学》),后者有相当篇幅讨论到球面三角形的性质。

三角学这门科学是从确定平面三角形和球面三角形的边和角的关系开始的。很可能埃及人早已发现三角形的不同元素之间具有某种关连,但首先看到有必要建立三角形的边与角之间的精确关系的乃是希腊人。托勒密在天文学上的研究要求建立某些能精确确定这些关系的规则,正是为了改善天文计算的目的,三角学才应运而生。因此之故,球面三角学的研究先于平面三角学。这些规则,有许多可在 *Almagest* 一书的第一卷中找到。

我们现时称为三角函数的那些比值,无论是托勒密还是当时的任何其他希腊人都没有使用过。他们只讲一个角的弦(chord of an angle),他们的所谓弦,就是圆弧上对圆心角所张弧的长度。由于弧的大小是

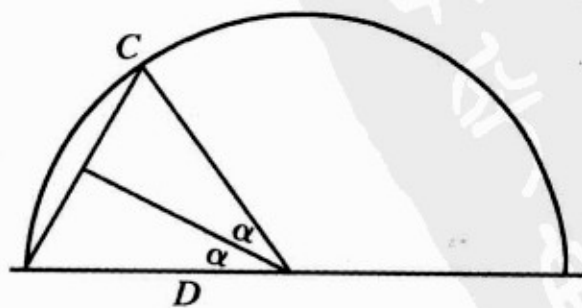


图 6

它所对之角的量度,所以很明显,在图6中弦 2α (即在弧上对着角 2α 所张弦的长度)和我们所说的 $\sin \alpha$ 之间存在等价性;不难看出, $\frac{1}{2} \text{chord } 2\alpha$ 和 $\sin \alpha$ 是两个等价表达式。(图6)因此,当托勒密(或喜帕恰斯)着手建立以 $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$ 为间隔的从 $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$ 到 180° 之间所有角度的弦数表时,所建立的其实是一个以 $\left(\frac{1}{4}\right)^\circ$ 为间隔的 $\left(\frac{1}{4}\right)^\circ$ 到 90° 角的正弦表。

可以预料,托勒密的方法相当复杂,这是由于当时的知识条件所限制。但他所遵循的原理可以简述如下:

首先他认识到,确定不同角度的弦相当于如何设法解决用圆的直径长度表示圆内接正多边形的边长问题。承认了这点后,他就把圆周分成360等份,即360度。直径则被分成120等份,使用的完全是六十进位分法,并且事实上也推广到分数。对于这些等份,他使用了等份、分、秒(*partes minutæ primæ, secundæ*)等名称。这样就能用直径上的许多等份

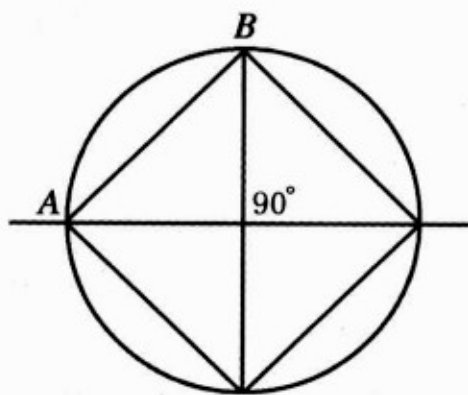


图7

来表示圆弧上对任一圆心角所张弦的长度。这就是角的弦。例如,如果有一个圆内接六边形,它的边就是 60° 角的弦。而这显然又等于半径,或直径上120等份中的60等份。这个结果与 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ 之间的等价性是一目了然的。其他角度的弦也可以用类似方法得到。例如, $\text{chord } 90^\circ$ 是直径被分为120等份的圆的内接正方形的边长,亦即

$$\text{chord } 90^\circ = AB = \sqrt{60^2 + 60^2} = 84.852\ 6 \text{ (图7)}$$

如改用六十进位制计算,它即为 $84^p 51' 10''$ 。^①同样,

$$\begin{aligned} \text{chord } 120^\circ &= AC \quad (\text{图8}) \\ &= 2 \sqrt{60^2 - 30^2} \\ &= 103.922\ 4 \end{aligned}$$

或以六十进位制表示为 $103^p 55' 23''$ 。在这些关系中,很容易看出 $\sin 45^\circ$ 和 $\sin 60^\circ$ 的值。

为了求得 $\text{chord } 36^\circ$ 和 $\text{chord } 72^\circ$,亦即圆内接正五边形和正十边形

^① 84^p 是 84 等份之意。——译注

的边,托勒密依靠了欧几里得的帮助。以 AB 为直径, O 为中心作一圆。作 OC 垂直于 AB ,并在 D 点平分 OB 。在 DA 上画出一段 DE ,使等于 DC ,并连接 EC 。(图 9)于是 OE 便是内接十边形的边,而 EC 则为内接五边形的边。因为,由于 BO 在 D 点被平分并延长到 E ,所以根据欧几里得第二卷,命题 6,我们有

$$\begin{aligned} BE \cdot EO + OD^2 &= DE^2 \\ &= DC^2 \\ &= OC^2 + OD^2 \end{aligned}$$

因此 $BE \cdot EO = OC^2$ 或 OB^2

所以 BE 在 O 处被分成中末比。欧几里得曾证明(第十三卷,命题 9):“如把同一圆内的内接正六边形和正十边形的边重合在一起,则整个直线在分点处被分成中末比,其较小的一段是十边形的边。”因此,由于 BO 显然是圆内接正六边形的边,所以 EO 就是同样画出的正十边形的边。为了求出它的大小,可假定 a 是圆的半径。以 x 表示 EO ,则

$$BE \cdot EO = OB^2$$

即

$$(a+x)x = a^2$$

因而

$$x = \frac{1}{2}a(\sqrt{5}-1)$$

这就是半径为 a 的圆的内接正十边形的边。为了求出圆内接正五边形的边,托勒密依靠了欧几里得第十三卷中的命题 10,这个命题指出:“如果有一正五边形内接于一圆,则此五边形边的平方,等于同一圆的内接六边形边的平方与内接十边形边的平方之和。”这样就确立了内接于同一圆内的五边形、六边形及十边形的边之间的关系,我们可以把这个关系写成:

$$\begin{aligned} (\text{五边形的边})^2 &= (\text{六边形的边})^2 + (\text{十边形的边})^2 \\ &= a^2 + \frac{1}{4}a^2(\sqrt{5}-1)^2 \end{aligned}$$

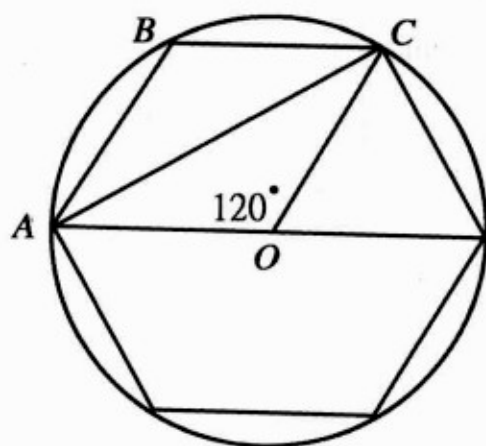


图 8

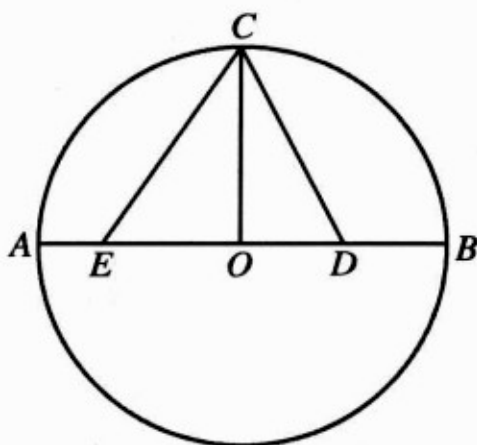


图 9

因而所求的长度是 $\frac{1}{2}a\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, 这里 a 是圆周的半径。现在我们来求 chord 36° , 它是 36° 圆心角所对弦的长度。由上述我们得:

$$\begin{aligned}\text{弦长} &= \text{十边形的边} \\ &= \frac{1}{2}a(\sqrt{5}-1) \\ &= 37.083 \text{ (由于 } a=60\text{)} \\ &= 37^\circ 4' 55''\end{aligned}$$

至于 chord 72° , 我们有

$$\begin{aligned}\text{弦长} &= \text{五边形的边} \\ &= \frac{1}{2}a\sqrt{10-2\sqrt{5}} \\ &= 70.536 \\ &= 70^\circ 32' 3''\end{aligned}$$

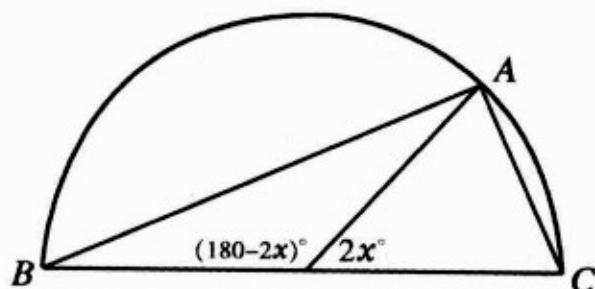


图 10

读者不难把这些关系分别与 $\sin 18^\circ$ 和 $\sin 36^\circ$ 的值联系起来。

托勒密为了扩充他的表, 不得不利用许多为任何初学三角学的人所熟知的关系。从图 10 显然可以看出

$$\begin{aligned}(\text{chord } 2x^\circ)^2 + \text{chord } (180^\circ - 2x^\circ)^2 &= AC^2 + AB^2 \\ &= BC^2, \text{ 即 } 120^2\end{aligned}$$

因为 $\frac{1}{2}\text{chord } 2x^\circ$ 等于 $\sin x^\circ$, 而 $\frac{1}{2}\text{chord } (180^\circ - 2x^\circ)$ 等于 $\sin (90^\circ - x^\circ)$ 或 $\cos x^\circ$, 所以上式也就是著名的关系:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

因此要求 chord 108° 时, 我们有

$$(\text{chord } 108^\circ)^2 + (\text{chord } 72^\circ)^2 = 120^2$$

$$\text{或 } (\text{chord } 108^\circ)^2 = 120^2 - (70.536)^2$$

$$\text{因而 } \text{chord } 108^\circ = 97.0807$$

这就是以直径 ($=120$) 来表示的 chord 108° 。现在

$$\frac{1}{2}\text{chord } 108^\circ = \sin 54^\circ$$

因此 $\sin 54^\circ$ 等于 48.5404, 如以半径 ($=60$) 的分数来表示, 则为 0.80901。

托勒密下一步是求 chord $(\alpha - \beta)$ 的表示式。这可以帮助他从已经确定了 chord 72° 和 chord 60° 的值, 求出 chord 12° 的值来。他的方法如下。

在直径 AD 上作一半圆, D 和 C 是半圆上的两点。(图 11) α 角和 β 角如图所示, 显然,

$$AC = \text{chord } \alpha$$

$$AB = \text{chord } \beta$$

$$BC = \text{chord } (\alpha - \beta)$$

$$BD = \text{chord } (180^\circ - \beta)$$

$$CD = \text{chord } (180^\circ - \alpha)$$

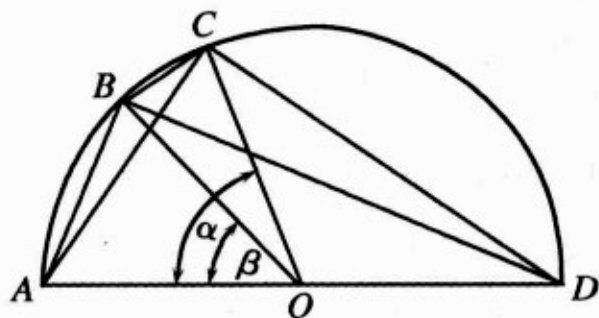


图 11

从著名的定理:

$$AC \cdot BD = BC \cdot AD + AB \cdot CD,$$

或 $BC \cdot AD = AC \cdot BD - AB \cdot CD$

可知 $\{\text{chord } (\alpha - \beta)\} \cdot \{\text{chord } 180^\circ\} =$

$$(\text{chord } \alpha) \cdot \{\text{chord } (180^\circ - \beta)\} - (\text{chord } \beta) \cdot \{\text{chord } (180^\circ - \alpha)\}$$

当然, 这无非是 $\sin(A - B)$ 的公式。

为了扩充他的表, 托勒密还不得不去确立半角的弦和全角的弦之间的关系, 这个关系在今天应以下一公式表示:

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta).$$

以 AB 为直径 O 为圆心作一圆, 画出两相等的弦 CB, AD 。称 $\angle AOD = \angle BOC = \frac{1}{2} \theta$, 则有:

$$AD \cdot CB + CD \cdot AB = AC \cdot BD$$

亦即 $AD^2 + CD \cdot AB = BD^2 = AB^2 - AD^2$

因此 $2AD^2 = AB^2 - AB \cdot CD$

$$AD^2 = \frac{1}{2} AB(AB - CD)$$

或 $(\text{chord } \frac{1}{2} \theta)^2 = \frac{1}{2} (\text{chord } 180^\circ) \{\text{chord } 180^\circ - \text{chord } (180^\circ - \theta)\}$

托勒密从 $\text{chord } 120^\circ$ 的已知值, 用这个公式求出了 $\text{chord } 30^\circ$, $\text{chord } 15^\circ$, $\text{chord } 7.5^\circ$ 等。同样, 已知 $\text{chord } 90^\circ$ 的值就能算出 $\text{chord } 45^\circ$, $\text{chord } 22.5^\circ$, $\text{chord } 11.25^\circ$ 等的值。托勒密重复应用这个公式, 造了一个弦数表, 以 $30'$ 为间隔, 一直计算到 $\text{chord } 1.5^\circ$ 和 $\text{chord } 0.75^\circ$, 他求出 $\text{chord } 1.5^\circ$ 是 $1^\circ 34' 15''$, $\text{chord } 0.75^\circ$ 是 $0^\circ 47' 8''$ 。在计算 $\text{chord } 1^\circ$ 时, 他利用了一个定理: 若在同一圆中作两条不等弦, 则大弦与小弦之比, 小于大弦所对的弧与小弦所对的弧之比。也就是说, 如果 AB 和 CD 是圆

中的两个不等弦,则 $AB:CD$ 小于 $\widehat{AB}:\widehat{CD}$,这个不等式在今天应写为 $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} < \frac{\alpha}{\beta}$ 。在此基础上,他利用内插法获得 chord 1° 的值是 $1^\circ 2' 50''$,并由此得出了 $\text{chord} \left(\frac{1}{2} \right)^\circ$ 即 $\sin \left(\frac{1}{4} \right)^\circ$ 的值是 $0^\circ 31' 25''$,它准确到小数点后第六位数。

在托勒密以后,人们对天文学的兴趣衰落了,因之三角学的研究也趋衰微。直到公元 5 世纪才开始有了一点复兴迹象,这种迹象首先在东方出现。印度人在计算技巧方面总是显得很熟练,他们很快采用了亚历山大学派的天文学知识,从而恢复了对三角学这门基础科学的兴趣。和这次复兴有关的人物是朴利沙、阿利耶毗陀、巴拉马古他等人,几世纪以后还有巴士卡拉。

印度人同希腊人一样,也把圆分成 360 度,或 21 600 分,但他们并不像托勒密那样把直径分成 120 等份,而是由朴利沙·薛汉达(公元 5 世纪初)把半径分成了 120 等份。在他以后,有一位卓越的天文数学家阿利耶毗陀(476 ~ 550)曾采用另外一种度量半径的方法,他用这种方法能把角的正弦表示出来,有些像我们的弧度法那样。阿利耶毗陀使圆周仍旧被分成 21 600 等份,用同样单位来度量半径。他已经知道,圆周与直径之比是 3.141 6:1,这意味着半径的长度为:

$$\frac{21\ 600}{2 \times 3.141\ 6} \text{ 或 } 3\ 438$$

其单位与圆周被分成的等份相同。后来的一位数学家巴拉马古把半径分成了 3 270 等份,分成这个值的原因不详。

印度人使用了我们所称的正弦函数和正矢($1 - \cos\theta$)。但是必须指出,当时把正弦仍然看做长度,看做二倍角所对弧上张开的弦长的一半。这个长度是用和半径一样的单位来度量的,因而当他们写成 $\sin 60^\circ = 2\ 977$ 时,这是指一个二倍于 60° 的角(即 120°)所对弧上张开的弦长的一半,即半径 3 438 等份中的 2 977 等份。 $\frac{2\ 977}{3\ 438}$ 和我们今日所用的 $\sin 60^\circ$ 值两者之间的等价性是一目了然的。印度人极少使用余弦函数,他们几乎总是使用余角的正弦函数。也没有什么证据说明他们使用过正切函数。

印度人是熟悉简单三角函数的关系的,他们用这些关系计算过从 0° 到 90° 角的正弦函数,以 $\left(3 \frac{3}{4} \right)^\circ$ 或直角的 $\frac{1}{24}$ 为间隔。他们的计算方

法如下：

$$\sin 90^\circ = \frac{1}{2} \text{chord } 180^\circ = 3\,438$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{chord } 60^\circ = \frac{1}{2} r = 1\,719$$

参照图 10, 我们注意到：

$$\{\text{chord } 120^\circ\}^2 + \{\text{chord } (180^\circ - 120^\circ)\}^2 = (\text{直径})^2$$

即

$$\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ = r^2 = 3\,438^2$$

或

$$\sin^2 60^\circ + \sin^2 30^\circ = 3\,438^2$$

因而

$$\sin^2 60^\circ = 3\,438^2 - 1\,719^2$$

或

$$\sin 60^\circ = 2\,977$$

同理

$$\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 3\,438^2$$

因此

$$\sin^2 45^\circ = \frac{3\,438}{\sqrt{2}} = 2\,430$$

他们还知道如何处理半角公式

$$2\sin^2 \frac{1}{2}\theta = 1 - \cos \theta$$

他们把它写成了

$$\sin \frac{1}{2}\theta = \sqrt{1\,719\{3\,438 - \sin(90^\circ - \theta)\}}.$$

这是他们从托勒密所发现的公式中推导出来的, 推导方法如下：

$$(\text{chord } \theta)^2 = \frac{1}{2} (\text{chord } 180^\circ) \{\text{chord } 180^\circ - \text{chord } (180^\circ - 2\theta)\}$$

即

$$(2\sin \frac{1}{2}\theta)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2r \{2r - 2\sin(90^\circ - \theta)\}$$

或

$$4\sin^2 \frac{1}{2}\theta = 2r \{r - \sin(90^\circ - \theta)\}$$

或

$$\sin^2 \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2} \cdot 3\,438 \{3\,438 - \sin(90^\circ - \theta)\}$$

$$(r = 3\,438)$$

这就导致上述结果。他们用这一公式从 $\sin 60^\circ$ 的已知值, 推出了 60° 的各倍分角的正弦函数值, 直到 3.75° 。例如, 求 $\sin 15^\circ$ 时, 他们就在上面的公式中令 $\theta = 30^\circ$,

因此

$$\begin{aligned} \sin^2 15^\circ &= 1\,719(3\,438 - \sin 60^\circ) \\ &= 1\,719(3\,438 - 2\,977) \end{aligned}$$

$$= 1\,719 \times 461$$

所以 $\sin 15^\circ = 890.2$ 。如果用半径的分数来表示,它就是 $\frac{890.2}{3\,438}$ 或 0.258 8。

从 $\sin 15^\circ$ 很容易就能算出 $\sin 7.5^\circ$ 和 $\sin 3.75^\circ$ 。

巴士卡拉(公元 12 世纪)可能是印度数学家当中最伟大的一位。他的不朽贡献就是关于不定方程的研究,我们不久将会谈到。他在三角学方面也有著作,而且好像已经有了把正弦函数看做一个比值的概念,即弧与半径之比的概念,因他曾写过 $\sin 1^\circ = \frac{10}{573}$,他可能是和前人一样,把圆周分成 21 600 等份,并接受了阿利耶毗陀的以数值 3 438 作为半径量度的做法而导出 $\sin 1^\circ$ 的这个值的,亦即

$$\sin 1^\circ = \frac{\text{弧 } 1^\circ}{\text{半径}} = \frac{1}{360} \times \frac{21\,600}{3\,438} = \frac{10}{573}$$

同理, 3.75° 的正弦值可作为 $\frac{1}{24}$ 直角所对的弧与半径之比而得出,因此可表示为 $\frac{100}{1\,528}$ 。

在印度的文献中,还没有什么证据说明印度人曾经研究过球面三角学。虽然如此,他们在天文学方面的研究表明他们是熟悉那些作为球面三角的解法之基础原理的。

现在我们转向阿拉伯人。在历代回教主的激励下,这个民族显示出他们乃是勤劳而有耐心的观察者。他们很少有什么创造性的贡献,但当他们获得 *Almagest* 的抄本后,立即采用了托勒密计算各种角度的弦长的方法。他们与印度人也有相当的商业往来,并且从印度人那里获得了许多印度人所常用的公式以及印度人的正弦数值表。在阿拉伯人中,最著名的一位是阿尔伯惕纽斯(阿尔·伯坦尼,死于公元 930 年)。他编写过一些表,12 世纪时提伏利的柏拉图曾把这些表译成了拉丁文,书名为 *De Scientia Stellarum*(《星象学》)。他仿照印度人那样有规则地使用了正弦函数,亦即半弦数来代替托勒密的整弦数。他还编过一种表,能给出长度为 12 单位的杆子在太阳高度为 $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \dots$ 时的投影之长,因此我们从他那里可以得到余切表和正切表。他是熟悉托勒密的三角形公式的,包括球面三角形 ABC 的公式:

$$\cos A = \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos A$$

在公元 10 世纪末,著名的阿布尔·威法曾经提出过一种用重复相除的方法计算每半度角的正弦值,达到非常高的准确度,他所算出的

$\sin 30'$ 的值准确到小数点后九位数字。他是第一个把正切函数作为一个独立函数引入,而不仅是作为正弦与余弦之比值引入的人。开罗的伊本·尤诺斯(死于公元 1008 年)也在三角函数的计算方面显示了相当的才能。此外,乌勒·贝格(1393 ~ 1449)曾使用今天应写成 $\sin^3 \theta = \frac{1}{4}(3\sin \theta - \sin 3\theta)$ 的关系式编造过正弦表。

三角学在蒲尔巴哈(1423 ~ 1461)、雷乔蒙塔努斯(原名约翰·穆勒),乔格·约阿希姆(雷铁克斯)和巴妥罗玛斯·皮铁斯卡斯(1561 ~ 1613)等人手中获得了进一步的发展。他们的贡献将在下章叙述。



第四章

亚历山大科学的衰微——黑暗时期与复兴

在托勒密逝世后,希腊科学的黄金时代就过去了,一个智慧停滞的时期接踵而来,直到出现了某些比托勒密的同时代人更有才能并且能维持亚历山大学派传统的人,这种停滞状态才开始消除。其中最著名的人物就是亚历山大的派帕斯以及狄奥芬塔斯,他们两人的光辉一直照耀到3世纪末。

派帕斯的盛誉是由于他的 *Mathematical Collections* (《数学集》) 一书,这是一部八卷头的著作,但仅有第一卷和第二卷的一部分保存了下来,其他都失传了。在统一早期作者的几何学知识方面,《数学集》一书的问世是一个重要步骤,正是从这部著作中,我们才了解到这些为了解决古代三个著名问题而进行过的尝试。派帕斯本人也有过重要的补充,其中包括对立体几何、高次平面曲线和等周问题的详尽处理,以及对力学的重要贡献。

派帕斯按照解题所需的曲线的性质,把问题作了一个重要的分类。

“我们已考虑过三种几何学问题。我们把其中某些叫做平面问题,另外一些叫做立体问题,还有些叫做线性问题。那些可以用直线和圆周一来解决的问题,都称为平面问题,因为用来解决这类问题的线的起源是在平面内。那些要靠一条或一条以上的圆锥曲线来解决的问题称为立体问题,因为在这些问题的作图中要用到立体图形的面,例如圆锥曲线。此外还有第三类问题,它们叫做线性问题,因为在这些问题的作图中必须用到不同于刚才所述的线,它们有着不同的并且更复杂的起源,或者它们是由于运动而产生的。属于这类线的是螺旋

线或螺线、割圆曲线、蚌线、蔓叶线等。”^①

书中有两个重要的等周问题。这就是:(1)在所有周长相同的圆弓形中,以半圆面积为最大;(2)在所有表面积相等的正立体中,以面数最多的立体体积为最大。

这本著作中还有一篇 *Treasury of Analysis* (《关于分析的宝库》)。这是“一个特殊部分的学说。它是提供给那些具备了一般基础,而希望获得解决他们碰到的有关曲线问题的人用的,而且它仅仅对于这一目的说来才有用。这是欧几里得、帕尔加的阿普罗尼亚斯和亚里斯泰阿斯长老三个人的工作,并且是用分析与综合的方法来进行的”^②。这本著作中载有著名的“派帕斯问题”：“如果从任一点作直线与五条具有给定位置的直线在各个给定角度上相交,并且其中三条直线所围之长方体的体积与其余两条直线和一给定直线所围之长方体的体积的比是给定的,则该点将落在给定位置的曲线上。如果有六条直线,并且其中三条所构成的上述立体与其余三条所构成的立体的体积之比是给定的,那么这一点仍将落在给定位置的曲线上。”笛卡儿曾试图用分析方法解决这一问题,并在几种情况下求出了必须使该点落于其上的曲线,这导致他发现了解析几何学的原理。

《数学集》还包含有对力学的重要贡献。第七卷中发表了一个著名的定理：“如果任一平面图形绕其平面内的一个外轴旋转,那么,由此产生的立体体积必等于这平面图形的面积与图形重心所经过距离的乘积。”对任一旋转图形的面积也有相应的定理。通常,这两个定理都归功于古尔丁(1577~1643)。

作为对数学的贡献,《数学集》并不能和我们刚提过的亚历山大学派的名著相比。然而,这是一部相当重要的著作,因为除了它的伟大历史价值之外,它还使人们对希腊几何学的兴趣从衰微中重新恢复起来。

狄奥芬塔斯与派帕斯生活在同时代。他是一个具有伟大创造力的人,兴趣主要是在代数方面(代数实际上是他所创造的一个数学分支),而不是在希腊人的传统几何学方面。

他的声望在于一部伟大的著作 *Arithmetica* (《算术》),这可以说是

① Hultsch, *Pappi Alexandrini Collectiones*, 1876~1878, 第一卷, 271 页。

② Ivor Thomas, *Greek Mathematical Works*, 第二卷, 597 页。

一部最早的代数论著,原先的十三卷只留存下来六卷。这本书是从平方、立方、平方的平方等定义开始的,对其中每一个他都引用了一个特殊符号。平方(未知量的平方)叫做 dynamis,符号是带有指数 Y 的 Δ ,即 Δ^Y 。立方叫做 cubus,它的符号是带有指数 Y 的 K,即 K^Y 。平方的自乘叫做 dynamo - dynamis,它的符号是带有指数 Y 的两个 Δ ,即 $\Delta^Y \Delta^Y$,依此类推。数字本身叫 arithmos,它的单位量值待定,符号类似于我们的 S。狄奥芬塔斯还用一些相应的符号表示分数。他已经知道怎样处理负数,因为他说“负数乘以负数得正数”,但在他的方程里从来都不容许有负数解或零解。例如像 $x + 12 = 8$ 这样的方程,他认为是不合理的,即没有意义的,因而一直不加考虑。

在上述论著的第四卷中,有一系列引导到二次方程的问题。其中有:

1. 试求三个数,使得其中最大的数和中间的数之差,与中间的数和最小的数之差具有给定的比值,而且其中任意二数之和是一平方数。狄奥芬塔斯假设给定的比值为 3:1,从而解出了这个问题。经过很长的演算之后,他得出 $\frac{7\ 338}{484}, \frac{1\ 878}{484}, \frac{58}{484}$ 三个数满足全部所给的条件。

2. 试求两个数,使得它们之和与它们的平方之和是给定数。他对这个问题的解法如下:

假定我们要使两个数的和等于 20,它们的平方之和等于 208。令两数之差是 $2x$,并令这两个数是 $10 + x$ 与 $10 - x$,则它们平方之和是 $(10 + x)^2 + (10 - x)^2$ 或 $2x^2 + 200$,由假设可知这个数是 208,因而 x 等于 2,因此这两个数就是 12 与 8。

这部著作中还有一个三次方程。这个方程是在他解决下列问题时出现的:试求一个直角三角形,使其面积与斜边的和是一平方数,而周长是一立方数。用现代的话来说,他的解法如下:

设面积为 x ,则斜边便为某一平方数减去 x ,譬如说是 $16 - x$ 。今面积既为 x ,故二直角边的乘积为 $2x$,它能分解成 2 和 x 两个数。这样我们就使得一个直角边是 x ,而另一直角边是 2。于是周长即为 18。但这不是立方数,这是一个平方数加 2。因此我们要求出一个平方数,当它加上 2 时要成为一个立方数。令正方形的边为 $(m + 1)$,而立方体的边为 $(m - 1)$,则

$$(m + 1)^2 + 2 = (m - 1)^3$$

或

$$m^2 + 2m + 3 = m^3 - 3m^2 + 3m - 1$$

因而 $m=4$ 。因此正方形的边为 5, 立方体的边为 3。“我现在改变这个直角三角形, 假定它的面积为 x , 并使斜边为 $25-x$, 底边仍等于 2, 垂直边等于 x 。于是从这个直角三角形得到

$$(25-x)^2 = x^2 + 4$$

因而 $x = \frac{621}{50}$ ①

二次方程在上述论著中是常见的。例如他解过:

$$x^2 + 2 = 3x \quad (x = 2)$$

$$84x^2 + 7x = 7 \quad (x = \frac{1}{4})$$

$$84x^2 = 7x + 7 \quad (x = \frac{1}{3})$$

要注意, 狄奥芬塔斯总是习惯于把方程排列得使所有各项都是正的。此外还要注意, 他只容许一个根, 即使两个根都是正的。

狄奥芬塔斯也相当注意二次不定方程, 并且大都是把它化为 $Ax^2 + Bx + C = y^2$ 的形式。他完全没有提到一次不定方程, 毫无疑问, 这是因为他的一般原则是愿意接受非整数的解, 而解一次不定方程的整个问题是在求整数解。

我们可以援引下列问题作为狄奥芬塔斯所研究的那类问题的一个例子: 求出两个数, 使得其中任一数的平方与另一数之和是一平方数。②用现代的话来说, 他的解法大致是这样: 设将未知数之一记为 x , 于是为了满足第一个条件, 第二数必须是 $2x+1$ 。第二个条件要求 $x + (2x+1)^2$ 或 $4x^2 + 5x + 1$ 等于一个平方数, 譬如说等于 y^2 。狄奥芬塔斯第二步是作 $2x-2$ 的平方。令此数与上述 $4x^2 + 5x + 1$ 相等, 这就给出一个数 x 等于 $\frac{3}{13}$, 另一数等于 $\frac{19}{13}$ 。

狄奥芬塔斯提出了好几个这一类的问题, 但始终没有提供过一个普遍的解法。“对于现代的人来说, 学习了狄奥芬塔斯的 100 个方程以后仍难以解出第 101 个方程……读者心绪不宁地急急忙忙从一个问题继续到一个问题, 就像在猜谜游戏中一样, 不能观其一点, 即及其余。狄奥芬塔斯给人的困惑多于喜悦。”③

① Ivor Thomas: *Greek Mathematical Works*, 第二卷, 541 页。

② 这里原文似乎少掉了一个条件, 否则与下文不符。——译注

③ Sedgwick and Tyler, *Hankel*, 135 页。

这本著作中还有一些关于数论的问题。我们援引其中一个来说明它对后来数学家的重要性：要求把一个给定的平方数分为两个平方数。用现代的话来说，其解答如下：设要求把 16 分为两个平方数。令一个平方数是 x^2 ，则另一数是 $16 - x^2$ 。我们要使得 $16 - x^2$ 成一平方数。假定

$$16 - x^2 = (2x - 4)^2$$

于是 $16 - x^2 = 4x^2 - 16x + 16,$

因而 $x = \frac{16}{5}.$

所以一个数是 $\frac{256}{25}$ ，另一数是 $\frac{144}{25}$ 。这个问题具有很大的历史价值，因为正是由于对这个问题的钻研，才使得费尔马得出了他的著名的“大定理”：“不可能把一个立方数分为两个立方数，把一个四次方数分为两个四次方数，等等。”亦即当 $n > 2$ 时，不可能求出方程 $x^n + y^n = z^n$ 的整数解。

在狄奥芬塔斯的解答中，还有许多其他重要的特点。首先，我们发觉在符号上他有很大的改进。希腊人和追随他们的阿拉伯人在他们的说明中从来没有使用过任何符号，每一步运算都是全部写出来的。由于对造句规则关心，使得几何学问题的证明与一篇文学主题的论文没有多大区别。几何证明经常被称为“修辞格式”(Rhetorical Style)，后来又称为“缩减格式”(Syncopated Style)，狄奥芬塔斯的名字就是与这个名称相联系的。符号被引用来表示经常重现的数量和运算，它们一般带有简写的性质，例如狄奥芬塔斯曾用符号来表示未知数、它的平方、它的立方，等等，直到六次幂。这种符号总是写在它的数字系数之前。我们曾指出，狄奥芬塔斯总是只限于使用一个未知数。如果问题需要用两个未知数，他就设法选择一个未知数，而使另一未知数用它表示出来。狄奥芬塔斯还曾用一种符号表示减法，用另一种符号表示相等。加法是用并列来表示的。这种形式的代数记号一直沿用到 17 世纪才逐渐合并为我们今天所用的符号系统(Symbolic)。

在离开狄奥芬塔斯之前，还可以提到他有另外两部著作，一部是关于多角数(De Polygonis Numeris)的著作，另一部是关于推论^①的著作。

① 推论，原文为 Porisms，从希腊语借来，意为使一特定问题有无数个解的命题。

黑暗时期 前面所说的亚历山大学派精神的衰退,在公元后最初几个世纪里一直持续着,而公元5世纪则衰落到了最低谷。当时罗马已经成为已知的世界之主,她的领土从印度河一直伸展到直布罗陀海峡,从尼罗河直到不列颠海岸。

在艺术、文学和法律方面,罗马给我们留下了宝贵的遗产,但在数学和科学方面,她的成就甚至在她兴盛之极的时候也是平凡无奇的。罗马人的意识在任何时候都是极端实际的,他们不大关心智慧的追求,而这种追求却曾在希腊人中产生过那样丰富的不朽成果。罗马人的需要是极少的,只需要食物与娱乐,大部分人除此之外就什么都漠不关心。罗马法律的执行,特别在规定遗产继承权方面,需要某些计算技巧,结果罗马人就成了使用各种计算方法的老手。但是罗马人的几何学却难得超越于土地测量中的那些简单法则,诸如建筑师和测量者所需要的那些法则。罗马人在其他方面的成就是巨大的,但在共和国的头几个世纪里,他们对数学或科学的发展贡献很少。西塞罗在他的“塔斯克来尼恩讲话”(Tusculan Oration)中曾为这个事实而痛惜。他感叹道:“希腊人给予几何学家以最高的荣誉,因此他们中间没有什么东西比数学发展得更光辉灿烂了,但是我们却把这门艺术局限于测量和计算的应用方面。”

甚至在早期的基督教学者中,也只有少数几个对数学或科学表现出仅有的一点兴趣。他们强烈的宗教热忱、他们对于生的见解——这种见解和对于死的看法是差不多的,是不鼓励他们追求世俗学问的。具有自由主义思想的奥利金(185~254)曾经作了一次值得赞誉的尝试,想使古代学术与基督教信仰统一起来,但是他的企图只是荒野中的一声呼喊。那种用毫无成见束缚的思想来研究自然的策励渐渐消失了。对渎神学识的兴趣,特别是对数学的兴趣低落了,欧洲进入了一个智慧上的黑暗时期。

但是随着早期的教会从地下墓窖中出现,她的活力就在逐渐增强,而对于那些兴趣不仅限于研究神学的知识分子阶级的兴起,态度也开始宽容些了。在混乱和内战——在公元初的几个世纪里这种情况是不少的——时期,修道院经常是提供庇护与闲适生活的最可靠的避难所,因此我们必须转向修道院,以便发现一些对世俗学识重新感到兴趣的最初迹象。古代学术的片段,特别是医疗技术,开始在本笃会修道院中被研究了,甚至在那些黑暗和萧条的世纪中,一点点希腊

文化的可怜的残篇被保存下来,并且为西方所利用。罗马最显赫的一个家庭的成员波伊提乌(475~524),是对这些希腊文化残篇最早感兴趣的人之一。他的 *Consolations of Philosophy* (《哲学的安慰》) 一书使他为人们所纪念。这部著作是当他被指控犯了叛逆罪而入狱,在监狱生活的愁苦中编写的。他的数学著作包括他的算术与音乐教科书,以及一部关于几何学的书,这两部著作都没有什么突出的创造性。前者只是翻译尼科马卡斯的著作,稍微有些增添,内容是有关算术、天文学、几何学和音乐四门学科的;后者大都不过是对欧几里得早期某些命题的说明。可是,那时数学知识是如此贫乏,以至即便是这样简单的东西,也不能为所有人所理解,而只能为那些比较博学的人所理解,这些博学的人在修道院之外是绝无仅有的。波伊提乌著作的主要价值,如同他的比较年轻的同时代人卡西奥多鲁斯的著作的价值一样,就是它在古代学术与中古学术之间提供了一条联系的纽带。

那时,强盛的罗马帝国正在很快地瓦解,随着恺撒城在公元455年的陷落,罗马的统治权实际上已告结束。在此40年前,希腊数学家中最后一位,地昂的女儿希帕蒂亚,在亚历山大的街上被暴徒杀害了。她的死标志着通常被称为黑暗时期的那段蛮荒时期的开始。古代文明的最后痕迹消逝了。在随后的三个世纪左右,欧洲一直处于智慧上的阴暗时期。

然而,在公元7世纪,复兴的迹象终于开始萌芽了。那是在远离罗马的地方。在英格兰北部出现了英国文化之父,查罗的比德老师^① (673~735)。他是一个不知疲倦的编纂者。他尽可能地把一切可资利用的古代学术搜集起来,这样,古代学术才得以流传到中古时期,他写过算术和编年史方面的东西,但在他的著述中很少有创造性。他还写过 *De Loquela per Gestum Digitorum* (《论指势语》)。这本著作之所以重要,是因为它是我们研究当时用指头计算的方法或符号法的主要源泉。

公元800年,查理曼被立为“西方之皇”,直到14年后他去世,都证明他不仅是一位聪明而强有力的统治者,同时也是一位伟大的学术扶植者。通常称为查理曼王朝复兴时期的公元9世纪的学术复兴就是以他的朝廷为起点和中心的。他那恢复过去荣光的热望促使他坚持主张牧师们要有高深的学问。这就逐渐酿成了一种为学问而求学问

① 老师(Venerable)是英国教会副监督的尊称。——译注

的兴趣。为了适应这一点,查理曼曾下令在全国设立一些与各个寺院保持有联系的学校。其中包括巨大的僧侣机构,例如兰斯、威尔士、查脱来斯等。学者们从意大利、英格兰与西班牙被召而来,其中的主要人物是约克的阿尔昆(735~804)。查理曼明智地把帝国的教育改组事宜委托给他。阿尔昆曾教授过计算技术,他还编写过许多初级教科书,这些教科书在中世纪获得了广泛流传。他还劝导他那高贵的扶助者在皇家宫廷中设置了一种学院,大概可以认为这就是巴黎大学的前身。但他对学术发展的最大贡献则在于他坚决反对当时占优势的一种观点,即认为世俗的学术是和教会的学说不相调和的。数学史方面有一本重要的著作叫做 *Propositiones ad acuendos Juvenes* (《磨炼心灵的种种问题》),就是他所著的。

然而,查理曼王朝复兴时期是短暂的,即使有比德和阿尔昆或继承他们的人们的努力,也无法阻挡已经开始密集的黑暗的进攻。公元814年查理曼逝世后,他的强大帝国就动荡不安,终至倾亡。在随后的纷扰不安的时代里,人们的思想从追求知识转向到其他方面。在将近两个世纪中再也找不出任何说明人们对世俗学术重新感兴趣的证据了。然而,公元1000年是一个转折点。刚被选为教皇的西尔韦斯特二世,一位博学而对文化感兴趣的人,就像兰斯的主教杰尔伯特一样,已经显示出自己是一个当时最伟大的学术扶助者。在他擢升为教皇时,他就表现出对促进学术和教授七种学艺具有很大热忱。特别是由于获得了波伊提乌著作的抄本,他对数学的研究产生了新的兴趣。据说他自己曾经编写过一本几何学方面的论著,和另一本关于用他自己制造的算盘进行计算的论著。从这本论著里我们可以知道一些在印度数字引入之前欧洲所用的计算方法。杰尔伯特逝世于1003年,但是他在他的短短的主教任期中所创立起来的传统一直保持到13世纪。他的学生伯纳立纳斯追随他的足迹,也编写过一本关于珠算的著作。

以后的两百年学术进展得很慢。然而,公元1200年是学术史上最辉煌的时期之一的开始。在这个时期可以看到许多高等学校的兴起,因此可以恰当地说,它标志着黑暗时期的结束。

当时,西方的数学知识虽然从未超过公元头10个世纪里的一般水平,但是古代学术中的伟大著作却没有被欧洲流失。甚至在最黑暗的日子里,拜占庭帝国也一直维持有一个文化背景,并且在皇宫里保存了不少希腊学术著作。公元7世纪初,阿拉伯人,一个直到那时还

不知名的种族,在他们的领袖穆罕默德的领导下,离开麦加向麦地那出发。在强烈的宗教热忱刺激下,他们出发几年后就开始走进了一个征服的时期。大马士革和耶路撒冷很快就相继落入他们之手。641年,他们掠夺了亚历山大,抢走了当时留存下来的希腊杰作。再加上印度人的算术和代数,到了7世纪中叶,他们使巴格达成了东方文化的中心。但他们并没有就此停步。第二年他们征服了埃及并转向西方,在半世纪稍多的时间里,他们一直到达直布罗陀海峡。711年,他们横渡到西班牙,从那里甚至还进入过法兰西,以后一直毫无阻碍地继续向前。最后,终于在732年为查尔斯·玛铁尔所阻。不久他们就安定下来,进入和平时期,并且立即表现出他们是希腊学术的热心赞助者。由于他们与当地人民杂居在一起,马上就受到西方思想的同化,并且从这个东西方的合流中产生出高度的文化。到了这个世纪中叶,科尔多瓦便发展成为西方的文化中心,就像巴格达是东方的文化中心一样。因此,在中古时代的大部分时间里,西班牙成了穆罕默德帝国的一部分,继承着它的文化,而且更为重要的是,它成为把这个文化传播到西欧的主要渠道。

哈里发^①的统治标志着欧洲新时代的开始。正是由于他们的努力,希腊文化传统才得以保存下来。在公元8世纪的下半叶,赫伦·阿尔·拉斯切特——他可能是所有哈里发中最著名的一个人——曾鼓励翻译希腊著作,通过这一方式,他为阿拉伯文化伟大时期的开端作出了很大贡献。他还面向东方,把一位有声望的印度天文学家阿尔·蒙叟吸引到他的宫廷里来。他的继承者阿尔·麦萌仿效他的前任,曾派遣过一个代表团到君士坦丁堡去。结果到了公元9世纪,阿拉伯人就成为大多数希腊科学杰作的所有人了。而且,由于同东方的商业往来日益增多,不仅希腊文化,而且印度文化也找到了通向巴格达的道路。印度文的天文表被翻译出来了,很可能阿拉伯人就是从这里开始熟悉印度计数系统的。

因此,阿拉伯人在研究与保存古代学术名著方面是有不朽的功绩的。但是他们做得比这更多,他们自己还作出了某些有意义的贡献。在阿尔·麦萌统治时期,曾经出现过一位作家名叫穆罕默德·伊本·缪莎·阿尔柯威里慈米,或阿尔卡里斯米(逝世于公元830年)。他对数

① 哈里发(Caliph)是穆罕默德继承人的尊称。——译注

学思想的影响比任何其他中古时代的作家都大。他编写过一本关于算术的著作,还有一本关于代数的著作。前者是仿效印度巴拉马古他的著作,由于书中经常使用印度数字,所以它有助于淘汰旧形式的计数方法。代数著作中有一些独创性,它在处理二次方程时给出了两个根。这显然比狄奥芬塔斯前进了一步,我们记得,后者一直满足于一个根。如我们已指出的,阿拉伯人对于天文学以及他们从托勒密那里继承下来的三角学这门基本科学也表现出浓厚兴趣。他们表现出自己乃是耐心而精确的观察者,在编制种种数表方面,他们自由地使用了正弦函数和正切函数。在阿尔卡里斯米之后是泰别脱·伊本·考拉(830~901),他翻译了欧几里得、阿基米得、阿普罗尼亚斯和托勒密的著作。另外还有阿尔·伯坦尼(他对三角学的贡献前面已经提到),还有阿尔卡耶米(约公元1000年)和阿尔卡尔几。所有这些活动的结果,就是到了公元10世纪之初,阿拉伯人就已经占有了希腊学术杰作,尤其是,他们已经具备了跟我们今天相差不很大的记数制。

在随后的一世纪中,阿拉伯的科学达到了它的最高水平。接着便是一个迅速衰落的时期,其速度并不亚于它的上升速度。到了世纪末,基督教开始征服西班牙。托莱多陷落于1085年,萨拉戈萨陷落于1118年,其结果是阿拉伯的文化为西欧所利用。

这种文化之所以得以在西方传播,是由于杰尔伯特激励人心的结果。这使得整个西方掀起了一次史无前例的向文化进军的热潮,它已不再被限于修道院之内。许多热心的学者一旦知道阿拉伯人已经把他們所占有的希腊名著翻译出来之后,他们立即就拼命设法把它们弄到手,并且把它们译成了拉丁文。其中最早的一个学者就是在公元12世纪前半叶享有盛名的巴思的阿台尔哈得。他假装成一个回教学者到科尔多瓦去听讲,在那里他获得了欧几里得《几何原本》的抄本,并把它译成拉丁文。他还把阿尔卡里斯米的天文表带到了西方。公元12世纪是翻译者的黄金时代,许多人都仿效阿台尔哈得的先例。克雷莫那的杰勒德(逝世于1187年)曾从阿拉伯文译本中把希腊著作以及其中阿拉伯人的注释翻译了出来;切斯特的罗伯特把阿尔卡里斯米的《代数学》译成了拉丁文;塞维利亚的约翰(约翰·希思派林西斯)根据阿拉伯人的资料编写过一本代数学。直到12世纪末,这种文化传播的主要中心是托莱多,因为基督教学者、穆斯林和犹太教师都在这里会聚。

中世纪的文化基础(实际上是思想基础)就是这些译本。但是应该注意到,在这种方式下传播的译本并不是忠于希腊原文的翻译品。如果我们回想起它们是通过怎样曲折的道路才到达西方世界的话,就可以看出这是不可避免的了。阿拉伯文译本后来被译成了蒂利亚文,拉丁文译本就是根据这个译本而来的。我们还必须记住,阿拉伯人对希腊语言缺乏熟练的掌握,而这对于准确无误的翻译来说是非常重要的。因此,传到中世纪学生那里的文化由于积聚了许多错误往往和原来的形式只有很少的相似之处。虽然如此,它对思想的激励作用仍是极大的。

在整个中世纪对知识的传播起着极重要作用的高等学校,其起源可以一直追溯到这次文化领域的扩张。由于对教育的要求日益增高,从前作为唯一学习场所的修道院学校和大教堂学校,已经显得不能适应需要了,于是逐渐出现了新的学校。从这些新学校中又诞生出中世纪的高等学校。在行会或社团已经成为团体生活的普遍形式的那个时代,教的人和学的人很自然地应当团结起来(*universitas magistrorum et scholarium*),以便互相帮助,保护他们的学术。虽然这些会对神学的兴趣是主要的,但它们对世俗学术也提供了一个轮廓。在意大利,法律学校与医药学校是最重要的,但阿尔卑斯山的北面可以学到文法、修辞和辩证法三门学科,接着可以学到更高级的包括算术、几何学、天文学和音乐四门学科。学校的水平并不太高,但虽然如此,教师和学生组成的这些社团却是中世纪最经久的特色之一。

复兴时期 13 世纪初是数学史上一个相当重要的时期的开始。当时,西方已经有了大部分希腊学术名著的拉丁文译本,这就引出一个活跃的智慧复兴的时期,而在科学和数学的园地里,复兴的迹象较其他方面更为显著。

欧洲对于这次复兴,并不是没有准备的。十字军使得欧洲的各部分彼此接触起来,并且使欧洲同东方新世界接触起来。那时,高等学校已经开始在学术传播方面发挥它们的作用。导致追求知识的热忱日益增长的另一因素,是人们对航海越来越感兴趣。大约在公元 11 世纪中的某一时期,中国人发明了指南针,这就激起了人们去寻找新大陆的热望,这种热望又转过来要求提高航海技术,这对天文学和数学两门基础科学发生了强烈的影响。所有这些因素在一起,引出了科

学史上一个最蔚为壮观的时期。追求创新的热情代替了墨守成规。西方的学校变得空前拥挤起来,“觉醒了的欧洲智力,在忙于阐明和分析展现在它眼前的新宝藏”^①。然而,也有一些相反的倾向。在13世纪的头几十年,亚里士多德的全部著作就已经有了拉丁文译本。人们过分地恪守他的学说,这对认真地研究数学和科学势必是一个重大障碍。“亚里士多德所享有的作为一个伦理学家的权威……本身多多少少有点传到了他所写的著作里。亚里士多德当时被公认是形而上学方面、伦理哲学方面乃至数学方面的一个几乎是最后的权威,这对数学有着极为不幸的后果。”^② 中世纪对于历史文献的尊敬给这些文献增加了一层不会有错的光辉。纯粹解释文字的学问兴起了,它的范围是如此狭隘,以致几乎完全忽视了自然科学。13世纪下半叶是亚里士多德学说崇拜者的兴盛时期。在这样的气氛里,数学只能勉强维持下来。

有两位学者在解释亚里士多德学说方面卓有成绩,一位是 the Doctor Universalis(万能博士)阿尔伯图斯(1206~1280),还有一位是他的更有名望的学生托马斯·阿奎那(1225~1274)。亚里士多德的哲学在任何地方都没有像它在托马斯的哲学形式中取得了那样完全的胜利。这两位学者的目的是要调和两个知识来源——教父们所传播的基督教信仰和柏拉图与亚里士多德所宣扬的理性真理。这种经院气的思想方式,受到了中世纪的奇异博士(the Doctor Mirabilis)罗吉尔·培根(1214~1292)的猛烈抨击。培根的 *Opus Majus*(《大著作》)是一本有极大价值的著作。

尽管如此,公元13世纪仍然标志着人真正的觉醒。由于阿拉伯人在保存和传播希腊科学方面所起的作用,西方从他们那里得到的好处是极大的。然而不应忘记,保存是一回事,创造则是另一回事。数学要有发展就要有创造才能,而在亚历山大科学的衰微和它在西方复兴之间的许多世纪里,简直没有什么证据说明谁有这种才能。

但在13世纪,可以找到两个人,他们足以被称为数学家,而与那些只能称为编纂者的人大不相同。那就是比萨的利奥纳多或称斐波纳奇(1170~1240)和萨克森的约敦纳斯·尼摩拉略斯。

① Rashdall, *Universities of the Middle Ages*, 第一卷, 32 页。

② Rashdall, *Universities of the Middle Ages*, 第一卷, 70 页。

利奥纳多是中世纪最伟大的数学家,完全可以说,西方的数学复兴是从他开始的。他在东方旅行期间积聚了许多东方的数学知识,这具体体现在他的 *Liber Abaci*(《算盘书》)一书中。该书出版于 1202 年,再版于 1228 年。这本书被公认为欧洲人所写的一本最伟大的数学论著,在两个世纪中一直作为一本标准著作。把印度计数制度介绍给欧洲的,正是这本著作。它还载有大量问题的解答,并以严谨的证明著称。书中未知量被记为 *res*(有时记为 *radix*),它的平方被记为 *census*,绝对项记为 *numerus*。在一个例子中,数字是用字母来表示的。他的 *Practica Geometrica*(《实用几何学》)一书(1220)也是对数学的一个杰出贡献。有人认为这本书是以欧几里得的一本散失了的著作 *On the Division of Figures*(《论数的分类》)为根据的。其中载有大量算术和几何方面的问题,并且在解这些问题时自由使用了代数方法。他还对希罗的用三角形的三边表示其面积的公式提出了一个巧妙的证明。

利奥纳多还编写过另外两本著作,叫做 *Flos*(《精华》)和 *Liber Quadratorum*(《求积法》)。前者主要是研究狄奥芬塔斯的分析方法。书中可以找到许多一次和二次不定方程的问题。他给方程 $x^3 + 2x^2 + 10x = 10$ 的唯一实根求出了很准确的数值。虽然他抛弃了负根,但他认为负的量是有意义的,并且他还熟悉许多由下列恒等式导出的定理:

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2 \\ &= (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2\end{aligned}$$

约敦纳斯·尼摩拉略斯(约敦纳斯·撒克叟)是一位德国的数学家和物理学家,生于公元 12 世纪下半叶。他曾于 1220 年加入黑袍教团,并且从 1222 年到 1237 年是这个教团的团长。和利奥纳多一样,他也随意使用了印度计数制。

在他的两本算术著作 *Demonstratio Algorismi*(《算术证明》)和 *Arithmetica decem Libris Demonstrata*(《十论算术证明》)中,没有表现出什么受到回教徒影响的痕迹。这两部著作都是仿效波伊提乌和厄科马卡斯的格调。在 *Arithmetica*(《算术》)一书里随意使用了字母来代替数字。约敦纳斯对问题的计算方面似乎并没有兴趣,他的目的是要用演绎方法处理问题。他对数论特别有兴趣,并且成功地证明了 $x(x+1)$ 既非立方数也非平方数。他的 *Tractatus de Numeris Datis*(《论已知数》)是一本关于代数的论著。其中有许多代数规则,并且收集了一系列导致一

次方程和二次方程的问题。他用字母表示已知量和未知量,乃是代数符号发展中一个显明进步。但当时还没有用来表示普通数学运算的符号。除了加法经常用并置来表示以外,一般的运算都必须全部写出来,他的 *De Triangulis* (《关于三角形》) 一书中有几个命题谈到相似三角形的性质,它们显然是以欧几里得的《几何原本》为根据的。

在这个世纪结束前,还有一个人是约翰·哈利法克斯(好莱坞的约翰,或沙克罗色斯柯)。在这世纪的后半叶他曾在帕多瓦教过书。他发表过一本名为 *De Sphaera Mundi* (《论球形宇宙》) 的著作。这是一本选录托勒密著作的编纂物,此外还载有一些阿拉伯人的贡献。他还写过一本 *Tractatus de Arte Numerandi* (《论计数的方法》), 这本著作曾促进了印度计数制在西方的推广。

在以后一个世纪里有尼可拉斯·鄂雷森(1323 ~ 1382)。他的 *Tractatus de Latitudinibus Formarum* (《论形状的大小》) 一书直到 1486 年才出版问世。在这本书里可以清楚地看到坐标系发展的步骤。因为这个缘故,鄂雷森一直被公认为坐标几何的创始人之一。但是这本著作中没有指出代数与几何之间的本质联系,他那些坐标并不是按照某种预先规定的法则点出的。在他的 *Algorismus Proportionum* (《比例计算》) 一书中,有证据说明他已经掌握了非正整数指数的概念,并且定义了 $a^{p/q}$ 。在这方面,鄂雷森似乎已经远远走在他那个时代的前面,因为直到肖吉的 *Triparty en la Science des Nombres* (《数字科学中的三分法》, 1484) 发表的时候,还没有其他有关的实例可寻。分数指数与负指数的真正意义首先是在约翰·沃利斯的 *Arithmetica Infinitorum* (《无穷算术》, 1656) 一书中阐明的。



第五章

东方的数学

在前面所评述的希腊文化时期之前很久,远东的民族就已经开始对数学表现出兴趣了,因此我们现在要转而谈谈东方。

在公元前 1200 年左右,印度河流域为雅利安民族所侵。在这之后,一种粗糙的文化慢慢开始在印度民族中出现了。跟古代其他民族一样,印度民族的数学知识也是由于研究星体的运动而发展起来的。毫无疑问,印度人很早就有了初步的天文知识,这是他们为了表示季节的循环而培育起来的。他们早已有了根据太阳和月亮编写出的历书。他们长期地仔细观察和记录过这些星体的运动,这就逐步使得他们获得了大量的计算技巧。

习惯上都强调东方数学知识之邃古,我们不清楚为什么要这样做,因为保存下来的数学文献中没有一本可以被肯定为是纪元前写的,吠陀^①时期的文献也没有显示出什么数学方面的东西。因此,要准确评价印度的成就是不可能的。即便在后来作家的著作中,也没有援引外来的材料或谈到外来的影响,可是有确凿的证据说明,这种影响是不小的。

在公元前许多世纪,印度已与西方接触。亚历山大大帝在征服埃及后,曾出征到美索不达米亚和整个中亚细亚。到了公元前 327 年,印度河流域已经处在他的管辖之下了。亚历山大向东方出征的直接后果之一,便是刺激了东西方之间的交流。在他死后,作为文化中心

^① 吠陀(Veda)是印度最古的经典,相传为移居五河(Panjah)地方的雅利安人所作。时在公元前 3000 年至 800 年间。——译注

的巴比伦就处于塞琉西王朝^①的统治之下了。巴比伦人、波斯人、希腊人和印度人在这里相互接触,而这种同希腊科学的接触对印度人是很有好处的。但与希腊人不同,印度人在数学上只想获得算术和代数方面的才能,他们虽然在热心地培育这两个学科,但数学对他们来说无非是一种计算技巧,他们并将之简化为一套规则的技巧,他们所掌握的几何学从来没有达到过很高标准。许多世纪以来,它都没有超越过用少数几个没有经过证明的公式来进行测量的原始形式,这些公式都是从外国抄袭来的,而在抄袭中讹误则是屡见不鲜。在整个东方数学中,任何地方都找不到丝毫的证据可以看出有我们所称之为证明的那种东西。“印度数学家对于我们所说的数学方法是没有什么兴趣的。他们没有提出一个定义,不大坚持逻辑顺序,他们并不关心他们所用的规则制定得是否适当,而且对基本原理一般都漠然视之。他们从来没有把数学作为一个研究科目来提高,事实上,他们对学问的态度可以说显然是非数学化的。”^② 虽然如此,他们的贡献并不是不重要的,特别是他们在书写数字方面所使用的位置值原理一直被说成是“他们最伟大的成就,并且在所有的数学发明中,是一个对智慧的总进展最有贡献的发明”^③。在处理那些导致一个以上未知数的方程的问题方面,印度人获得了大量技巧。他们解二次方程的方法即使放在现代教科书中也未必不合适,而在他们尝试解某些简易的三次方程和四次方程的实例时,曾预见到处理这些方程的现代发展。他们没有为有理量与无理量之间的微妙区别所阻碍——这些问题一直是希腊人所感到困惑的,而毫不犹豫地接受了二次方程的无理数解,因而胜过了他们的前人。关于绝对负数这个非常重要的概念的引出,也要归功于印度人。然而,他们突出的贡献是在研究不定方程方面。在这方面,他们超过了狄奥芬塔斯,并且预见到现代代数中的某些发现。

如前所述,印度人研究数学的动力是由于其试图制定一种标记季节循环的历书,因此他们最早的著作是关于天文学的。这些著作就是所谓的 *Siddhantas* (照字面直译就是《已经确立的结论》)。然而, *Siddhantas* 的内容比那些仅仅记载巴比伦人流传下来的结果的编纂物丰富些。它们的内容有相当多是理论知识,其中可以清楚地看到希腊影

① 塞琉西王朝系亚历山大大帝部下的将军 Seleucids Nicator 所建。——译注

② Sedgwick and Tyler, G. R. Kaye, 159 页。

③ Cajori, 88 页。

响的痕迹。*Siddhantas* 共有五卷,其中 *Surya Siddhanta* (《苏利耶历数全书》)^①和 *Paulisa Siddhanta* (《包利萨历数全书》)^②是最重要的,可以认为其中包含有印度三角学的基础。

随着西方罗马帝国的衰微,数学活动的中心移到了东方。在公元 500 ~ 公元 1000 年期间,印度出现了四五个有名的数学家。印度数学最繁盛的时期可能是在闻名于 6 世纪初的天文 - 数学家阿利耶毗陀的著作发表前后。他的著作实质上是 *Siddhantas* 中所载结果的系统化,他的论文 *Aryabhata* (《阿利耶毗陀书》)是特别有价值的,因为它不仅推动了这门学科的研究,而且还描绘了当时数学知识状态的情景。书中可以找到常用算术运算的种种规则,其中包括乘方和开方。此外还有一些关于简单的二次方程、简单的代数恒等式和等差级数的知识。但它最重要的一个特点乃是书中用连分数处理了不定方程的问题,这和今天所用的方法实质上相同。然而,正如印度关于数学的所有其他著作一样,它很难说是一本科学论著。它收集了 66 条规则,其中许多都是非常复杂并且难以遵守的,它的重点总是放在论题的计算方面。书中没有一处地方提示过证明方法,在为了得到解答而采取的一个个步骤中,进行的方法与所有古代的东方问题一样,都是巧妙地用文字来解释的。如前所述,阿利耶毗陀非常注意三角学,他引入了正弦和正矢的概念,对于托勒密的繁拙的半弦来说是一个显著的进步。他的几何学仅限于用少数规则来确定立体的体积,并且这些规则中不少是不准确的。例如,棱锥体的体积被定为底面积和高的乘积之一半,球的体积被定为具有同样半径的圆面积和这面积的平方根之乘积。虽然如此,他对于圆周与其直径之比却求出了一个非常相近的近似值。他是这样说的:100 加 4,乘以 8,再加 62 000,结果是直径为 20 000 的圆周的近似值,这就导致所求的比值是 3.141 6。但由于某种原因,直到 12 世纪前后印度数学家始终没有使用过这个值。

阿利耶毗陀以后的 6 个世纪,即公元 600 ~ 公元 1200 年,是一个灿烂辉煌的时期,同时也是一个荒芜贫瘠的时期。这个时期最不朽的贡献仍然是在不定方程的研究方面,这个问题对印度人总是具有一种强烈的吸引力。前面我们看到,狄奥芬塔斯在处理这种问题时显示了

① 此书相传为日神苏利耶所著,故名。——译注

② 此书为印度古代天文学家 Paulisa 所著,故名。——译注

相当的才智,但他似乎没有得出求解的普遍法则。要把建立普遍法则的功绩归诸印度数学家会是过分的,但是,他们的工作对于我们在狄奥芬塔斯那里所能找到的东西说来,则标志着明显的进步。同时,有些迹象表明这个时期对几何学的兴趣恢复了,人们开始研究直角三角形的性质,对纯粹几何学的不大彻底的处理也出现了。就在这个时期,特别是在分析方面产生了许多显示出相当技巧的数学家,他们是巴拉马古他(生于 598 年)、马哈维拉(活跃于 9 世纪)、司里特哈拉(生于 999 年)和巴士卡拉(生于 1119 年)。

巴拉马古他是他的国家里最伟大的数学家之一。他的工作主要建立在前人的工作上,尤其是阿利耶毗陀的基础上,但其中也有许多创造性的东西。他的著作中经常出现有算术运算(包括对开方问题的处理)、利息问题、比例、等差级数以及自然数的平方和等问题。我们在这里还可以看到他对负数及零已经有了清楚的概念。他提出了解各种二次方程的规则,这些规则是用一系列问题的解答作为例证来说明的,但在各个步骤中仍然是用文字叙述的,此外别无其他方式。然而,他在不定方程方面却显示出最伟大的才能。阿利耶毗陀简单陈述过解一次不定方程的方法。巴拉马古他则大大超过了这一点,他提出了方程 $ax + by = c$ (a, b 和 c 都是整数)的完全整数解,以及处理不定方程 $ax^2 + 1 = y^2$ 的巧妙方法。虽然他在这个数学分支中的工作不如我们在 5 个多世纪以后巴士卡拉的工作中看到的那样完整,但这已足够给予他在数学史上一个不朽的地位了。他的几何学仅限于度量方面的几个基本规则以及关于直角三角形的性质。关于圆的几何学,包括圆内接四边形的性质,他已经有了初步知识,但他所求出的圆周与其直径之比的数值是 $\sqrt{10}$,不如他的前人准确。

考虑一下他所提出并解出的一些例题,就能最好地了解他的工作的性质和范围。在每个实例中,解答的前面都有一条专门适合于问题的法则,但是关于这种法则是如何推演出来的,我们却无法找到线索。

“以月息 5% 借出的金额,10 个月后总共得到 6 的 6 倍。问借出的金额是多少?”

“交给一个金匠 800 塞伐纳^①金子,吩咐他替祭司做几个器皿,并在 100 分中取 5 分作为赚头。试问制成金器的重量。”

^① 塞伐纳,印度古计量单位,1 塞伐纳约为 11.34 克。——译注

“贷款总额是 500 德拉玛^①, 利率不知。这笔贷款 4 个月后的利息又以同样利率借给了别人, 10 个月后积成 78。试问本金的利率。”

印度人之偏爱计算以及把它简化成一些经验法则, 则没有比巴拉马古他在处理等差级数时表现得更明显了。他所提出的确定末项和确定一个给定级数之和的法则是“项数减 1, 乘以公差, 加到首项上, 就是末项的总数”, 亦即 $l = a + (n - 1)d$ 。

“末项与首项之和的一半是中项的值, 它乘以项数, 便是整个级数之和。”接着便是应用这些法则的问题。这些问题都是求 s, a, n, d 诸量之一, 而另三个量已知。例如, 已知首项、公差与级数之和而要求项数时, 其法则是: 把首项的 2 倍与公差之差的平方, 加到级数的和与公差的 8 倍之乘积上; 取其平方根, 减去首项的 2 倍与公差之差, 再除以公差的 2 倍, 就是项数, 亦即

$$n = \frac{\sqrt{(2a - d)^2 + 8ds} - (2a - d)}{2d}$$

这个公式不难从等差级数之和的基本公式中推导出来。

自然数的平方和由下面的法则确定“1, 2, 3, 4, 5, …… 诸数之和乘以两倍的项数加上 1, 所得结果除以 3 便给出诸数的平方和”, 即 $\sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 。同样, 要求自然数的立方和时, 提出的办法是求

出诸数之和再把它平方, 即 $\sum n^3 = [\frac{1}{2}n(n+1)]^2$ 。这些法则都是用实例来说明的, 看来, 它们就是在这些实例的经验基础上建立起来的。

巴拉马古他的几何学也是由一系列法则的叙述构成的。他已经知道三角形的面积用其三边来表示的正确公式, 并且有一个求四边形面积的类似公式, 这就是: 写下四边之和的一半, 再分别从它减去各边, 然后连乘起来, 所得乘积的平方根恰好就是面积, 即 $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ 。然而, 这仅当四边形是圆内接四边形时才是正确的。但他还有两个求三角形和四边形“大致”面积的法则。“边的一半与相反边(即对边)的乘积, 便是三角形和四边形的大致面积。”他用这些“法则”求出了一个边为 12 单位的等边三角形的面积, 以及一个边为 13, 13, 10 的等腰三角形的面积, 还有一个边为 13, 14, 15 的不等边三角形的面积, 所得结果分别是 72, 65, 98, 这与正确的

^① 德拉玛, 印度古计量单位。——译注

数值(分别为 $36\sqrt{3}$, 60, 84)相差很大。同样,对于圆周与其直径的比,他有两个值,一个精值等于 $\sqrt{10}$,一个粗值等于 3,他认为后者供一般之用已经足够准确了。

让我们回到巴拉马古他对方程的处理。在开始处理方程之前,是一些讨论负数与零的法则。这些法则大部分是正确的——负数乘以或除以负数得正数,零减去负数也得正数。但他假定“零除以零”是零,这是错误的。

解二次方程的法则是:把常数项放在未知数的平方项和一次项的另外一边。将常数项乘以平方项的系数的四倍,加上中项的系数的平方,所得结果的平方根减去中项的系数,再除以平方项的系数的二倍,就是中项的值。即若方程是 $ax^2 + bx = c$,则 x 的值是

$$\frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}$$

在不定方程的处理和基本算术运算方面,马哈维拉继续走着前人的道路。他重述了巴拉马古他所提出的正负号法则,但他最有价值的贡献是对分数的处理。在这方面,我们发现有一条说明一个分数除以另一分数的法则。这个处理总的说来比前人更为详尽,虽然可能是更简单基本些。各种问题是经常出现的,马哈维拉表现出他不仅会处理等差级数,而且也会处理等比级数。他详尽地处理了各种不同类型的二次方程以及诸边是有理数的直角三角形。

1120 年,学者司里特哈拉差不多完全按照他前人的方式编写了一本著作,叫做 *Compendium of Calculation* (《计算方法概要》)。据巴士卡拉称,他还编过一本关于二次方程的著作,他是用下列法则来解这种方程的:将方程两端乘以一个等于 4 倍平方项的系数的数。再在两端加上一个等于未知数的原系数之平方的数。然后开方,即若方程是

$$ax^2 + bx = c$$

我们就有 $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2$

或 $2ax + b = \sqrt{4ac + b^2}$

有关零的运算法则有八条,但以零作除数的运算不在其中。

在印度数学家的行列中,只剩下一个杰出的作者了,这就是闻名于 12 世纪的巴士卡拉。他是当时最有权威和最有创造性的一位思想家,有两部著作,名为 *Lilavati* (《嬉有章》) 和 *Vija - Ganita* (《因数算法章》)。这两部著作直到现代还是印度数学的最完全的说明。巴士卡

拉肯定是熟悉巴拉马古他的著作的,我们在 *Lilavati* 一书中看到的许多东西在巴拉马古他的著作中都有。书中详尽地讨论了常用的算术运算,包括乘方和开方。巴士卡拉已经了解零的真实意义,所以他的加法、减法、乘法法则说得是正确的,虽然在开始时关于用零作除数的问题还有些模糊不清。在 *Lilavati* 一书中,他宣称:“一个确定的数被符号 0 除是零的倒数;符号 0 的乘积是零,但要保留它作为符号 0 的倍数,如果马上要作进一步运算的话;符号 0 既然成为一个因子,所以如果后来零作为一个确定数的除数,则该确定数就必须理解为不变的。因此,任何数加上符号 0 或减去符号 0 后也不变。”但在 *Vija - Ganita* 里,他对零的了解更接近于其真正含义。在这部著作里他说道:“一个数除以零便成为一个分母是符号 0 的分数。例如 3 除以零得 $\frac{3}{0}$ 。这个分母是符号 0 的分数,称为无限大量。在这个以符号 0 作为分母的量中,可以加入或取出任何量而无任何变化发生,就像在毁灭世界或创造世界的时期,那个无穷的、不变的上帝没有发生任何变化一样,虽然有大量种类的生物被吞没或产生出来。”

Lilavati 中有各种处理一次方程与二次方程的方法,包括不尽根的使用。书中还有几个解出 $ax^2 + c = y^2$ 类型的不定方程的例子,等一会儿我们就要讨论这种方程。关于面积与直角三角形的问题是经常出现的,但很少有系统处理的证据,对严谨性的坚持就更少了。没有讨论到角度,也丝毫没有提到与平行线有关的定理或比例理论。

在他的问题中,某些问题的解需要相当的技巧。我们随便选出其中几个问题来看看。

1. “有着明亮的眼睛的漂亮姑娘,假如你知道正确的反演方法,那么告诉我一个数,它乘以 3 加上乘积的 $\frac{3}{4}$,再除以 7,再减去商的 $\frac{1}{3}$,然后自乘,再从乘积中减去 52,将余数开方再加上 8,再把和数除以 10,得出 2。”巴士卡拉把以上运算全部反转来进行后,得出所求的数是 28。

2. “一个朝拜圣地的旅行者在泼拉耶加捐掉他的钱的一半,在卡西捐掉余数的 $\frac{2}{9}$,余钱的 $\frac{1}{4}$ 在路上付了税,在加沙再用掉剩下的 $\frac{6}{10}$,剩下的钱数是 63 涅西卡,请告诉我原来的钱数。”巴士卡拉以单位数作为原数,求出那个旅行者剩下了 $\frac{7}{60}$,这是剩钱数的 $\frac{1}{540}$,因此所求的原数是 540。

有赖于解二次方程的问题,经常在他的著作中见到。“若一数与其平方根的某一倍数之和或差是给定的,把系数^①一半的平方加到给定的数上,取其和数的平方根,把这个平方根加上或减去系数的一半再平方起来,就是所求之数”,即已知

$$x + a\sqrt{x} = b$$

则

$$x + a\sqrt{x} + \frac{1}{4}a^2 = b + \frac{1}{4}a^2$$

$$(\sqrt{x} + \frac{1}{2}a)^2 = b + \frac{1}{4}a^2$$

$$(\sqrt{x} + \frac{1}{2}a) = \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$$

由此式平方即可得到 x 的值。例如要解下列问题:

“一群鹅中有 1 对留在水中游戏,它们看到 7 倍于原来鹅数的平方根的半数的鹅厌倦了这项游戏,而向岸边游去。请告诉我,亲爱的姑娘,鹅群中有多少鹅?”这个问题今天应写作:

$$2 + 3\frac{1}{2}\sqrt{x} = x$$

用上面的方法不难解出答案是 $x = 16$ 。

关于级数的问题,比起早期的作者来,他很少有进步。我们从大量的问题中只援引两题。

1. “国王远征去夺取敌人的象,第一天行军二逾缮那^②,每天增加相同数量的行程。一星期内他行军 80 逾缮那。每天增加多少?”

2. “某人第一次给一个乞丐两个玛瑙贝壳(货币),并应允每日增加施舍物两倍,一个月他舍施多少?”

每个例子都给出了正确答案,但他始终没有指出解题的方法。也许解题的法则是通过尝试和错误发现的。

关于直角三角形的问题,则限于确定有理的边。“斜边是 85,博学的人们,哪些直角边是有理的?”

① 这里是指该数平方根前的系数。——译注

② 逾缮那(yojana),印度古长度单位。yojana 的一般含义为“套一次牲口所行的路程”,并无确定的长度。由于时代、地区及习俗不同,行程道路也有很大的区别,加之古代测量欠精确,以致各种不同的逾缮那长度都不一样。——译注

为了解决这个问题,巴士卡拉首先指示他的读者要把斜边加倍($=170$),然后乘以一个任意选定的数,例如 2;所得之数(340)再除以这个任意数的平方加 1,即除以 5。这就给出直角边为 68。这个数乘以那任意选定的数,得 136;由此数减去斜边,其得数 51 就是另一边。他提出了各种法则,但都可归结为一句话,就是:有理直角三角形的诸边可以写作 $a^2+1, 2a, a^2-1$ 。因为,若斜边为 k ,使其加倍然后乘以一任意数 a ,我们便有 $2ak$ 。它除以这任意数的平方加 1,使得直角边为 $\frac{2ak}{a^2+1}$ 。将此数乘以那任意数再减去斜边,就得到另一边为 $\frac{2a^2k}{a^2+1} - k$ 或 $\frac{k(a^2-1)}{a^2+1}$,因此三个边与 $a^2+1, 2a, a^2-1$ 成比例。

另外还提出了一些法则。例如,设取二数乘积的二倍为直角边,它们的平方之差为另一边,它们的平方之和就是斜边,并为一有理数。这是下列陈述的另一说法: $2mn, m^2-n^2, m^2+n^2$ 诸数构成一直角三角形。然而,这是马哈维拉和巴拉马古他已经知道了的。

巴士卡拉追随着前人的道路,解决了许多有关直角三角形的问题,下面是随便选出的其中的几个。

1. 如果一根长 32 腕尺的竹竿直立于平地上,由于风力而折断,其尖端于距底端 16 腕尺处触地,试问它是在距地面多少腕尺处被折断的?

2. 柱脚下有一蛇洞,柱顶上栖一孔雀。若孔雀看到一条蛇在三倍于柱高的距离处游向其洞,这时它就斜着向蛇猛扑过去。如果它们向前走了同样的距离,快说出它们在距蛇洞多少腕尺处相遇?

3. 一只猿从一棵 100 腕尺高的树上下来,向一个 200 腕尺远的池塘走去。同时,另一只猿从树的某一高度处离开树迅速地斜着跳向同一地点。如果他们所经过的距离相等,博学的人,快告诉我这个高度是多少?

4. 在一个群集着鹅与鹤的湖中,可以看到一棵莲花蕊的尖端露出水面约一拏之长($=$ 半腕尺)。它由于风力所迫而逐渐移向前,并在 2 腕尺距离处浸入水中。数学家们,快算出水的深度。

这里我们说说巴士卡拉给出的第一题和最后一题的解。从根部到折断处的高度是直角边。将此记为 h 。竹竿的长(32 腕尺)是斜边与直角边之和,所以斜边是 $(32-h)$ 。斜边的平方与直角边平方之差是 16^2 ,即 $(32-h)^2 - h^2 = 16^2$,因此 $h = 12$ 。这就是直角边,即从根部到折断处的距离。

在最后一题中,斜边与直角边之差是半腕尺。以 x 表示湖深,我们就有 $x^2 + 2^2 = (x + \frac{1}{2})^2$ 或 $x = 3\frac{3}{4}$ 。

这部著作中还有许多关于三角形面积与四边形面积的问题。书中重复了三角形的面积用其三边来表示的公式,并且说这是精确的面积。但他猛烈攻击了早期作家所宣布的求四边形面积的“法则”。他说:“既然四边形的对角线是不确定的,在这种情况下面积怎么会是确定的呢?古人认为已经求出了的那些对角线,并不适用于其他问题。同样的边可以有不同的对角线,因此图形的面积也各有不同。一个既不详细指明垂直线之一,也不详细指明对角线之一的人,怎能要求其他东西呢?或者说,怎能在对角线不确定的情况下要求面积是确定的呢?这个问题的是大错特错了。回答这个问题的人更是有过之而无不及。”

巴士卡拉有几个关于圆的问题。他给圆周与其直径之比提出了两个值。“当圆的直径乘以 3 927 再除以 1 250 时,商就接近于圆周。”要么乘以 22 再除以 7,便是大致的圆周。球的体积是用这样几句话来表示的:

“法则:对于一个圆,直径的 $\frac{1}{4}$ 乘以圆周便是面积。该数乘以 4 便是圆旋转而成的整个球的面积;以直径乘这个球的周积或面积,再除以 6,就是球的精确立体体积或容积。”很容易看出,以上就是通常关于球面面积与球体体积的公式。

Vija - Ganita 一书继续走着与 *Lilavati* 相同的路线,但在解释上更有系统些。书中重复了关于负数与零的那些法则,此外还补充了一段话:虽然一个正数或负数的平方是正数,但正数的平方根却是二重性的,一正一负,负数的平方根是不存在的,因为负数不是一个平方数。

二次方程是用取完全平方的办法来解的。两个根都给出了,但其中之一被抛弃不用。例如:

1.“一根 12 指高的指时针,它的影子减去斜边的 $\frac{1}{3}$ 后变成 14 指长。快把那影子的长度告诉我。”这个问题应写为:

$$x - \frac{\sqrt{x^2 + 144}}{3} = 14$$

它导致两个答案,即 $x = 9$ 和 $x = \frac{45}{2}$,前者被抛弃了,可能是根据

试验而弃去的。

2. “一队人的 $\frac{1}{5}$ 减去 3, 再平方起来, 向洞中走去, 还看到有一人正在爬上树。这队人有多少?” 用现代的记法就是:

$$\left(\frac{x}{5} - 3\right)^2 + 1 = x$$

因此 $x = 50$ 或 5 。但是第二个答案没有采用。

和他的前辈一样, 巴士卡拉最大的长处就是能处理那些导致不定方程的问题, 上面提到的两部著作充满了这类问题。其中许多无疑是从早期作者那里抄来的, 但要确定其抄袭的范围是不可能的。下文中将看到问题是很多的, 而且各有不同。每一题的解答本身都颇见功力。但要是断言说, 在那里可以发现什么诸如解题的普遍方法这类东西, 那就会言过其实了, 因为这是完全不合乎东方思想的。而且, 书中对于把同样性质的问题归类起来的工作做得很少。这里我们试把各种问题按照它们在现代文献中应有的顺序排列起来。

1. $ax + c = by$ 。 “试确定一数, 使得一给定数乘以该数, 并将乘积加于一给定数上时, 其和(或其差, 如果加数是负的话)可为一已知数除尽。”例如: “数学家们, 快说出一个乘数是多少, 它乘以 221, 再加 65 于其积上时, 其和可被 195 除尽, 即无余数。”以现代的记号写起来, 就是求如下方程的整数解:

$$221x + 65 = 195y$$

巴士卡拉求得 x 和 y 的值分别为 5 和 6, 他已认识到不仅存在唯一的解。他补充说, 这个方程事实上也可为 $x = 50, y = 57$ 等所满足。

2. $ax + by + cz = d$ 。这是含有三个未知数的一次不定方程。它出现在下列问题中:

“四个人拥有的马匹数各为 5, 3, 6, 8, 他们所拥有的骆驼数为 2, 7, 4, 1, 属于他们的驴子数是 8, 2, 1, 3, 牛数是 7, 1, 2, 1。所有四人同样富有, 请告诉我每匹马和其他牲畜的价格。”巴士卡拉通过复杂的推理过程得出下面所列的各种牲畜的相对价值, 并指出可以有各种不同的答案。

马	骆驼	驴	牛
85	76	31	4

有个问题曾以这种或那种方式在所有著名的东方作者的著作中出现过, 巴士卡拉把它解了出来。这个问题是: “买 5 只鸽子需要 3 德拉玛, 买 7 只鹤需要 5 德拉玛, 买 9 只鹅需要 7 德拉玛, 3 只孔雀需要 9

德拉玛,现在,这些禽鸟共有 100 只,价值 100 德拉玛。需要求出每种鸟的价格。”巴士卡拉得出了几组解答,即:

价格(德拉玛): 3, 40, 21, 36; 6, 30, 28, 36; 9, 20, 35, 36。

禽鸟(只): 5, 56, 27, 12; 10, 42, 36, 12; 15, 28, 45, 12。

3. $ax + by + d = xy$ 。“请告诉我,你是否知道这样两个数,它们分别乘以 4 与 3 再加上 2 时,其总和等于这两个数的乘积。”这就是要求方程 $4x + 3y + 2 = xy$ 的整数解。巴士卡拉给这个方程提出了几组不同的解,即 17 与 5, 10 与 6, 等等。

上述类型的方程在早期数学著作中是十分普通的。但是巴士卡拉研究二次不定方程的方法要比他的前人先进得多。 $ax^2 + 1 = y^2$ ^① 这种方程曾经吸引了各个时期的数学家。在巴士卡拉的著作中可以找到五个这种类型的方程以及它们的解答。这就是:

1. 什么数的平方乘以 8 再加 1 后是一平方数?
2. 什么数的平方乘以 11 再加 1 后是一平方数?
3. 什么数的平方乘以 32 再加 1 后是一平方数?
4. 什么数的平方乘以 67 再加 1 后是一平方数?
5. 什么数的平方乘以 61 再加 1 后是一平方数?

其中第 1 题 $8x^2 + 1 = y^2$ 的解是 $x = 6, y = 17$ 。

第 2 题 $11x^2 + 1 = y^2$ 的解是 $x = 3, y = 10$ 。

第 3 题 $32x^2 + 1 = y^2$ 的解是 $x = 3, y = 17$ 。

第 4 题 $67x^2 + 1 = y^2$ 的解是 $x = 5\,967, y = 48\,842$ 。

第 5 题 $61x^2 + 1 = y^2$ 的解是 $x = 22\,615\,390, y = 1\,776\,319\,049$ 。

一个类似的问题是:“什么数的平方乘以 13,再从乘积中减去 1 后是一平方数?”即当 $13x^2 - 1 = y^2$ 时,试求 x 与 y 。巴士卡拉求出的答案是 $x = 5, y = 18$ 。与此没有多大不同的一个问题是“什么数的平方乘以 13,再加上此数后是一平方数?”求出的数是 18^2 , 即 324。属于这类的问题还有:“什么数加倍后,再加上其平方的 6 倍就能开出平方根?”“请告诉我一个数,它的平方的平方乘以 5,并减去其平方的 100 倍后,可以开出平方根”。巴士卡拉求出第一题($6x^2 + 2x = y^2$)的答案是 $x = 8$,第二题($5x^4 - 100x^2 = y^2$)的答案是 $x = 10$ 或 170。

下面是新类型的问题:“假若你在分析方面是一位去除中项的能

① 人们把它称为裴尔方程。费尔马曾详尽地研究过它。

手,那么请告诉我一个数,它分别乘以3与5,再在两个乘积上各加上1以后,得到的都是平方数?”即若 $3x+1=s^2$, $5x+1=t^2$,则 x 的可能的整数值是什么?他给出了两个答案,即 $x=16$ 与 $x=1\,008$ 。下一题也有些相似:“快说出两个数,比如5与6,它们的平方之差分别乘以3与2,再在两个乘积上各加上3后,两者都是平方数?”即要求出两个数,使得

$$2(x^2 - y^2) + 3 = s^2$$

$$3(x^2 - y^2) + 3 = t^2$$

除了5与6以外,满足所给条件的还有两对数599与600,49与60。

“请告诉我两个数,它们的平方分别乘以7与8后,相加起来得一平方数,相减再加1也得一平方数。”即 $7x^2+8y^2=s^2$, $7x^2-8y^2+1=t^2$ 。这些方程被 $x=2$, $y=2$ 以及 $x=34$, $y=38$ 所满足。^①

我们从大量的各种各样的问题中选出下面几个问题:

1.“什么数乘以3,再将乘积加上1后就变成一立方数,其立方根平方起来再乘以3,并加上1后就成为一平方数?”这个数被求出为21。

2.“什么数除以6后余5,除以5后余4,除以4后余3,除以3后余2?”所求的数为59。

3.“哪些数分别乘以5,7,9再除以20后,其余数以公差1递增成级数,而其商与其余数相等?”巴士卡拉得出42,33,28三个数,认为它们符合全部所要求的条件。

4.“如果你知道两个数,它们的立方之和是一平方数,而平方之和是一立方数,我就承认你是一位卓越的数学家。”所求的数为625与1250。

5.“最博学的代数学家,请告诉我这样一些整数对,它们之差是一平方数,而它们的平方之和是一立方数。”巴士卡拉得出这些整数对是75与100,16821与17661,等等。

6.“有一对数,把它们的和、积以及它们的平方加在一起,其总数的平方根与这对数加起来,一共可得23,这对数是什么?”“要是共得53,这对数是什么?”“请分别用整数告诉我。若是你知道答案的话,你就是一个举世无双的优秀的数学家。”所求的整数对在第二问中是7与5,在第二问中是11与17。

最后有一题是:“求四个数,使得它们的乘积是它们之和的20倍。

^① 将答案代入方程是不符合条件的,但原文如此。——译注

有几组数满足这些条件?”巴士卡拉得出这些数组是:

11, 5, 4, 2

55, 6, 4, 1

60, 8, 3, 1

28, 10, 3, 1

在巴士卡拉之后就没有什么进展了。当时正在积聚力量的西方复兴气象还没有传布到东方,所以印度数学开始经历一段持续了几个世纪之久的衰微时期。从巴士卡拉以后直到较现代,印度都没有出现过著名的数学家。

这里来谈谈印度人在提出这些问题时所使用的记号是合适的。印度代数学家用编写字和大写字母来作符号,这差不多等于是发明了一种代数符号系统。负数是用一点来表示的(就像牛顿使用“加点”字母那样),但是在区别正数时,除了不用这种负数符号以外没有再用其他符号。加法、减法、乘法等运算都没有用什么记号或符号来表示,也没有任何符号表示相等或相对大小(大于或小于)。这些运算都是用文字写出来的,一般是写在所要运算的数的后面。分数的写法是把分母写在分子下面,但没有一条线把它们分开来。在他们的代数中,方程两端排列的方式相同,一端写在另一端的下面,这种把一项放在另一项下面的方法便于详细叙述各个步骤,这些步骤总是伴随着运算的。

未知数的符号不限于有一种,而是遍及各种各样的名称,他们所用的记号是各种颜色名称的第一个音节,其中第一个是例外,用的是 *ya* (= *tanto*) 这个名称。“这许许多多,以及黑色、蓝色、黄色与红色,此外还有其他颜色,都被可尊敬的教师们选用来代表未知数的数值,以便进行计算。”^① 他们不仅用符号来表示那些要求出其数值的未知数,而且也用符号来表示其数值可以任意假定的变量。平方(square)、立方(solid)这些名字的起始字母,就分别表示这些幂次,它们合并起来则表示更高的幂次。不尽根类似地用第一个音节来表示。一个复合量的各项是按幂次来排列的,常数项总是排在最后。数字系数也使用了,其中包括单位数,它们都是写在表示未知数的符号的后面。方程的排列并不是使得所有的量都成为正数,也不是把复合量中的正项排在前面。

^① *Vija - Ganita*, 139 页。

我们可将印度数学家的成就总结如下：

1. 在常用算术运算方面,包括不尽根的使用与零的意义,以及由于被零除而得出的无穷大量方面,他们显示出相当的技巧。
2. 他们已经熟悉一次方程与二次方程的一般解,并已接触过高次方程的解,能在简单情况下解出高次方程。
3. 他们获得了一次不定方程的一般解。
4. 他们已能通过尝试求出二次不定方程的一个答案,而获得它的多种答案。这种方法最接近于拉格朗日所提出的求这种方程的一般解的办法了。拉格朗日首先证明了:任何导致二次不定方程的问题,总可以用整数解出。^①

中国 当我们试图追溯中国的数学发展时,我们发现现有的记载都是不太可靠的,再加上缺乏令人满意的译本,这就使得确定精确纪年史的工作(特别是希腊以前的时期)极端困难了。^②

数学在它整个漫长的历史中是离不开天文学的。农业与航海的需要要求知道一些天体的运动,哪怕只是为了标记季节的循环。中国也不例外。我们发现早在公元前 3000 年,中国人已经知道一些天文知识了,这又转过来要求一定程度的计算技巧。和其他古代民族一样,原始形式的土地测量导致某些几何方面的知识。据说中国人早在希腊人之前就已知道了直角三角形的性质,但是没有什么证据说明他们曾把它付诸实际应用,也没有什么证据说明他们曾有任何三角学的知识,无论是平面的还是球面的。直到从波斯天文学家那里,他们才获得了这种知识,那已是公元 3 世纪的事了。

某些中国皇帝是鼓励学术的。塞琉西王朝为了同东方保持持久联系所作的努力并不是没有效果的,有证据说明希腊文化曾传入中国,特别是在汉朝期间。甚至在汉朝之前从公元前 1122 年持续到公元前 255 年的时期,就已经历过著名的文化发展,尤其是在孔子生活的时代(公元前 550 年~公元前 478 年),就为整个帝国开拓了一个学术时期。但周代末年为内战所苦,这个时期的进步很小,而且这微小的进步也受到了阻碍。当时,大约在公元前 3 世纪末,在位的皇帝秦

① 参看 *Sanskrit of Brahmagupta and Bhāscara*, 1871。

② 关于中国数学的广泛记述,读者可参考 Y. Mikami, *The Development of Mathematics in China and Japan*, Leipzig, 1913。

始皇(公元前 246 年 ~ 公元前 210 年)对于不断发展的学术活动感到惊慌,于是就下令将所有的书籍毁掉,违者给以最严厉的惩处。这道敕令最初是针对伦理与道德方面的著作的,但是天文学和数学方面的著作也在这次大破坏中毁掉了。事实上,唯一幸免的乃是那些被认为“有用的”论著。它们包括医药、农业和占星学方面的著作。

公元前 202 年建立起来的汉朝,开始了一个复兴时期,在清洗中幸免的那些著作复原了,这就在远东开始了一个学术时期。希腊文化当时已开始传入中国,并且在这个东西方的交流中,产生了对知识的真正兴趣,数学则分享了其中的一份。这种复兴气象由于《九章算术》的发表而达到了最高峰。我们不知这部伟大名著的作者是谁,就连它开始编写的时间也不知道。相传它的依据是一部公元前 1000 年的著作,但我们能有这部著作应归功于张苍(逝世于公元前 152 年)。《九章算术》所谈的是平面图形的求积法和分数,以及有关比例、分配算法、开平方根与立方根、立体求积法、混合法、用虚设法解决“盈亏”的问题,还有含一个以上未知数的线性方程(这里我们首次看到关于负数的文字记载)以及毕达哥拉斯定理。圆周与其直径之比被定为 3,球的直径被定为它的体积的 $\sqrt[3]{\frac{16}{9}}$ 倍,弓形面积被定为 $\frac{1}{2}a(a+c)$,这里 c 为弦长, a 为垂线长。书中可以找到以正方形为底的截棱锥体的体积公式,前面我们曾看到,这个公式已为埃及人所知,巴拉马古他和马哈维拉也知道它。前面援引过的一个问题(“如果一根长 32 腕尺的竹竿……”)也可以在书中找到,这意味着他们已经知道处理二次方程的方法。这部著作的内容是极为广泛的,而且远远超过了印度人所发表的任何著作,虽然印度人的著作出现得晚得多。

汉朝之后是几个世纪的分裂,这使得帝国长期处于不断的骚乱之中,这就导致了一个停滞的时期,直到公元 1 世纪才开始出现一些复兴的迹象,这是由于中国与西方商业往来的刺激所致。特别是计算方法,在这个时期前后大大进步了。印度对中国的影响可能是相当大的,这可从下一事实看出:隋朝(公元 6 世纪)出现了一些解释印度数学的著作。早在公元 67 年佛教就已传入中国,从那时起,就有一些靠布施为生的佛教传教士移居到中国,他们带来了许多印度文化,其中包括一些数学知识。当时在实用技术方面已有相当大的发展,特别是在几世纪后指南针的发明促进了天文学这门基础科学的发展,这就推

动了计算方法的研究。活跃于 1 世纪的《孙子算经》的作者是一位有着很大功绩的数学著作家。他编写过一部精湛的论著,共三卷,虽然是仿效早期作者的,但其内容仍有许多独创性。书中已能熟练地运用大数,并且普遍采用了十进制,对平方根也有清楚的解释。书中可以找到导致一次不定方程的例题,例如:“有某种东西,其数是未知的。当其除以 3 时,余数为 2;除以 5 时,余数为 3;除以 7 时,余数为 2。这种东西的数目是多少?”可以看出,它属于印度数学家著作中常见的一类问题。

3 世纪时出现了天文学家王蕃。他的主要贡献似乎是他算出了圆周与其直径之比,他把这个比值表为 $\frac{142}{45}$,或 3.155 5。 $\sqrt{10}$ 的数值也大约是在这个时候出现的。《海岛算经》一书也属于这个时期的著作。书中有这样一个问题,“试确定从海岸到一海岛的距离”,这个问题在两世纪后曾出现在阿利耶毗陀的著作中。

张丘建(6 世纪)的《算经》是一部精湛的论著,人们认为它对后来的印度数学著作家可能有很大的启发。据说后来的印度著作与张丘建的《算经》极其相似。例如,我们在这部论著中曾看到张丘建所说的 100 只家禽的问题:“一只雄鸡价值 5 文钱,一只雌鸡价值 3 文钱,三只小鸡价值 1 文钱。若有 100 文钱买 100 只家禽,每种可买多少?”这个问题曾出现在马哈维拉与巴士卡拉的著作中,但在巴拉马古他的著作中没有提到。这证明印度数学与中国数学是有密切联系的。至于居先的问题,曾经有过热烈争论,根据米卡米的意见,应予中国人以居先之权。然而必须承认,在中国数学中没有什么东西是接近巴士卡拉关于不定方程的著作的。

11 世纪与 12 世纪是贫瘠的,13 世纪略有活动,此后直到晚近,中国人在数学上只有很小的进展。张丘建以后的一个世纪曾出现过一部著作,其中对分数的处理相当精细,并给出了圆周与直径之比的一个确切的近似值,即 $\frac{355}{113}$ 。书中还有一些由立体体积的问题产生的简单三次方程。

虽然中国人的贡献是有价值的,特别是在数学进展缓慢的那段时期中更是这样,但在中国人手中,也和印度人手中一样,这门学科并不是那么抽象的。

第六章

文艺复兴时期的数学:从雷乔蒙塔努斯到笛卡儿

14 世纪伊始,西欧在学术发展方面又一度陷于停滞。前一世纪曾给未来以极大希望,但是希望变成现实却经历了一段漫长的道路。

智力迟钝时期的出现有很多原因。英法之间的百年战争(1337 ~ 1453)使得局势动荡不定,还有延续 10 年之久的黑死病使西方饱受侵害,以致人们的思想不能集中于追求知识。而且,经院哲学还未丧失其束缚力,它的影响还处处可及。直到 100 多年后,才可以说科学终于摆脱了经院式的思想束缚。但欧洲也不是在任何时候都完全放弃了数学研究。这门学科曾得到比萨的利奥纳多和约郭纳斯·尼摩拉略斯等人的推动,使它免于完全毁灭,尽管它被降成了一些内容简单的材料,只能满足诸如商业来往和调整历法的需要。如果说有进展的话,那就是在计算方法方面的改进。即使在最黑暗的时期,也仍然可以发现到有些人会计算三角形的面积或解二次方程,但在这类技巧和理解欧几里得论证方法的能力之间,或在这类技巧和融会贯通阿基米得与阿普罗尼亚斯的学问之间,还隔着一道鸿沟,要沟通它还要做许多开拓性工作。为了获得并巩固古人留下的巨大遗产,需要许多热忱的学者耐心进行大量的辛苦工作,就数学来说,14 世纪恰恰缺乏这些。数学不再能吸引有学问的人了,即使有少数人转到这门学科来,那也要遭到一般人的冷遇和学者的反对。

但 15 世纪开始是一个转折点,这时文艺复兴运动已经形成,虽然习惯上都认为它是一个文学运动,但实际上对数学进展的影响也是不小的。温顺的墨守成规已为独立思考的有益愿望所代替,这就导致人们对自然现象的更仔细的探究。如前所述,从修道院逐渐发展起了大学。现在这些大学在传播知识方面开始起着重要的作用,虽然中古时

期的大学里所教授的数学是微不足道的,但这些学校的影响却不可忽视。无疑的,最大的刺激是由于印刷术的发明(1450 年左右),结果是印刷文字代替了口传,因而吸引了更广大的听众。这对数学发展的一个重要影响就是由此产生了改进符号的要求。正是从这段时期以后,可以看出数学在慢慢地但却明显地朝着我们今天所熟悉的符号进展。

1453 年,君士坦丁堡失陷于土耳其人之手,拜占庭王朝覆没了。这对科学发展的影响并不是不利的,因为这使得东方学者有机会来到西欧。许多有学问的希腊人到意大利土地上来避难,受到了当地有权力的美第奇家族的欢迎。由于他们带来了希腊学术上的杰作,所以对古典学术的复兴贡献很大。我们知道,在此以前西方只能看到希腊经典著作的讹误百出的译本。只要我们想到它们到达西方世界要经过多么遥远曲折的道路,就可看出这是免不了的。但是东方人的这次流徙使学者们能有机会读到这些经典著作的原文,因而这种机会马上就为西方所利用。在这方面,英国落后于欧洲其他国家,直到 1570 年英国才首次把欧几里得的《几何原本》从希腊文译成英文。

对数学的兴趣日益增加着,这反映为人们对航海重新开始感兴趣,特别是在那些海洋国家。1492 年,哥伦布航行到美洲,5 年后法斯哥·达·伽马绕过了好望角,1499 年味斯浦奇横渡大西洋,15 世纪初麦哲伦又环航地球。

所有这些因素结合起来,便揭开了西方世界一个有名的最繁盛的时期。数学在这个全面复兴的局面中没有落后,不久它就开始获得了自从希腊文化衰落以后从来没有过的领导地位。在算术方面,由于商业扩展,导致新的更有效的计算方法的发展。代数原先在麻烦累赘的记法的双重压力下,一直在无望地挣扎着,现在也开始挣脱枷锁,采用和今天所用的记法没有多大差异的形式了。三次方程和四次方程的解已经得出,负数甚至虚数获得了它们应有的地位,现代方程论方面也取得了相当的进展。三角学有着惊人的进展,开始作为一门独立科学出现了。只有几何学的进展不那么显著,除了对希腊几何学更加熟悉,以及对圆的求积法作了精益求精的努力,因而获得了圆周率 π 的更准确的数值以外,就没有什么东西能预示 17 世纪头几十年那些划时代的发现了。同样重要的一个事实是:潜伏了 18 个世纪的力学,终于开始吸引科学家的注意力,关于力和运动的观念,现在开始得到澄清,对静力学问题也搞得很有劲。

文艺复兴始于意大利和德国,因为那时这两个国家是最兴盛的。汉萨联盟当时仍控制着北方的贸易,在意大利,佛罗伦萨和威尼斯正处于繁荣昌盛的顶峰。德国的贡献主要是在天文学和三角学方面,意大利的卓越之处在于代数学的发展。法国直到16世纪末才表现出她的力量,先是韦达,后来是笛卡儿、帕斯卡和费尔马,使法国占据领导地位几达一个世纪之久。

这个世纪伊始,久萨的尼可拉斯出生了(1401~1464),这样称呼他是由于他的出生地是特里尔城附近的久萨。他是一位极有才干的人,他的才能使他擢升到红衣主教的位置。对数学史家来说,尼可拉斯最值得纪念的是他在圆的求积法方面的尝试,在此过程中,他获得了圆周与直径比的非常准确的数值。他编写过几篇数学短论,除了求积法以外,还讨论了数论,其中有些地方出现过无限大的概念。在维也纳执教的乔格·波尔巴哈(1423~1461)的贡献更为不朽。他的主要兴趣是在天文学和三角学方面。他对托勒密的 *Almagest* (《天文集》)一书当时的译本感到不满意,于是就着手重译,以避免原译中的错误。他生前没有完成这个工作。后来他的学生约翰·穆勒(1436~1476)继续完成了它。约翰·穆勒生于哥尼斯堡,其笔名雷乔蒙塔努斯更为世人所知。他可能是欧洲自从比萨的利奥纳多以来最有天才的一个人了。他给我们留下了很多译品和评注,还有他本人的一些独创性的和有价值的贡献。

雷乔蒙塔努斯虽然在许多数学部门中都留下了痕迹,但是使他名垂不朽的,乃是他三角学上的贡献。他的 *De Triangulis Omnimodis* (《论各种三角形》,1464)一书是对这门学科最早的系统性阐述。过去希腊人把三角学看做天文学的一个分支,现在则开始有了显著的进展。平面三角形和球面三角形的解得到了空前详尽的处理。在这本著作中,我们看到有这样的话:球面三角形的三边可确定它的三个角,球面三角形的三个角也可确定它的各个边。雷乔蒙塔努斯还编过一个正切表,此后,编制三角函数表就流行起来了。在这方面,乔格·约阿希姆(雷铁克斯)和B.皮铁斯卡斯作了显著的贡献。

雷乔蒙塔努斯研究过许多几何学问题,他把它们化成了代数问题,从而孕育了150年后笛卡儿的伟大成就。他的代数学是修辞学性质的,所有运算都完全用文字写出来。*res* 一字被用来表示所求的量,它的平方则被记为 *census*,后来,他把它们缩写为 *r* 和 *c*(或 *z*)。*et* 是指

加法。一个典型的例子是下列方程：

$$16\text{census et } 2\,000 \text{ æquales } 680 \text{ rebus}$$

亦即 $16x^2 + 2\,000 = 680x$

现在我们转向意大利。如前所述,在意大利,主要的发展是在代数方面。方济各会的修道士卢加·帕西奥里,是一位托斯卡纳人,由于他热心于数学研究,使他得以任米兰大学的数学教授。他的巨著 *Summa de Arithmetica, Geometria, Proporzioni e Proporzionalta* (《算术、几何、比和比例摘要》) 发表于 1494 年,这本书虽然在数学上没有作出什么具体贡献,但它在许多年中一直是数学方面的标准论著。该书共有两篇,上篇专门讨论算术和代数,下篇专论几何。在算术部分,对四则运算作了详细解释。书中有一个直到 60 乘 60 的乘法表,还有大量关于乘法和除法的例子。除了总结那个时期所有的全部数学知识外,《摘要》一书还对当时的许多商业事务作了有趣的探讨。这本书里还引进了一些符号,如以 P(Piu) 表示加法,以 m(meno) 表示减法。一号有时用来表示相等。平方根是以 R(Radix) 来表示的。虽然孤立的负量在当时仍然是新奇的东西,但帕西奥里已经知道如何运用正负号,因为他曾这样来说明减法:

$$\begin{array}{r} \text{P.} \quad 16 \\ \text{m.} \quad 4 \\ \hline \text{p.} \quad 20 \end{array}$$

亦即 $+16 - (-4) = +20$; 他还这样来说明过乘法:

$$4 \cdot \text{P} \cdot \text{R}6 \quad 4 \cdot \text{m} \cdot \text{R}6 \quad \text{乘积为 } 16\text{m}6 \quad 10$$

亦即 $(4 + \sqrt{6})(4 - \sqrt{6}) = 16 - 6 = 10$

帕西奥里广泛讨论过一次方程与二次方程,而且对于解那些可化为二次方程的方程,表现得非常熟练。他和所有的前人以及大多数的后人一样,只限于取正根,对他来说负根是毫无意义的。他研究过三次方程,但没有成功。他的失败使他相信,高于二次的方程不见得比化圆为方的问题更有可能被解出来。

《摘要》一书的几何学部分内容很少是比萨的利奥纳多甚至欧几里得所没有提到过的,例如帕西奥里曾说明如何作一正方形,使其面积等于一给定的长方形,他还采取化为三角形和长方形的方法,确定过许多直线形的面积。

在考察 15 世纪时,还有两个人的名字是应当提到的。利奥纳多·

达·芬奇(1452~1519)对力学有一定的专长,似乎也特别研究过某些几何曲线。但由于他的著作直到18世纪末才发表出来,所以它们对科学的进展几乎没有什么影响^①。法国人尼可拉斯·肖吉(逝世于1500年)在1484年曾经编写过一本小册子,名叫 *Triparty en la Science des Nombres* (《数学科学中的三分法》),其中使用了帕西奥里的符号体系。更重要的是他在这本著作中已经预见到正负指数的应用。肖吉还讨论了算术运算,在书末还提出了一些关于数论问题的看法。

帕西奥里认为解二次以上的方程的尝试不会成功。这个看法似乎遭到后人的反对,因为在16世纪中,大多数天才数学家的注意力都是针对在两个问题上。第一个问题是求三次方程和四次方程的解;第二个问题是设法求得二次以上的方程的近似根。

三次方程对西方来说并不新奇。牛加保近来在古代巴比伦人的文献中发现过这种方程的例子。^② 我们前面曾看到,狄奥芬塔斯也知道这种方程。但首先完全解出这种方程却要归功于16世纪意大利的博洛尼亚数学学派。

据威尼斯数学教授卡尔丹(哲罗姆·卡尔丹,1501~1576)所述,三次方程的解是西披奥·德尔·弗罗解出的。弗罗是博洛尼亚数学学会的会长,大约在1505年,他得出了 $x^3 + 6x = 0$ 类型的方程的根。他的解法并未发表,但是布雷西亚人尼可拉·方丹纳(1500~1557)听说过这件事,并由此受到鼓舞,自己去设法求解。方丹纳由于小时候受伤而口吃,所以世人称他为塔尔塔格里亚(即“结巴”),这个名字倒更为人们所知。尽管他早年非常贫困,但在数学研究上却表现出相当的才能,终于被任命为威尼斯的数学教授。1530年有人曾向他提过两个问题:

1. 试求一数,其立方加上它的平方的三倍等于5,即求满足方程 $x^3 + 3x^2 = 5$ 的 x 的值。

2. 试求三数,其中第二数比第一数大2,第三数也比第二数大2,三数的乘积是1 000,即求下列方程的解:

$$x(x+2)(x+4) = 1\,000$$

即

$$x^3 + 6x^2 + 8x = 1\,000$$

① P. 杜汉认为,在利奥纳多的著作发表之前,卡尔丹曾引用过其中的内容。

② Turnbull, *Theory of Equations*, 117 页。

对第一个问题,塔尔塔格里亚求出

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})} - 1$$

对第二个问题,他求出

$$x = \sqrt[3]{500 + \sqrt{250\,000 - \frac{64}{27}}} + \sqrt[3]{500 - \sqrt{250\,000 - \frac{64}{27}}} - 2$$

但他毫未指出他得到解的方法。同时,弗罗的学生佛罗里达也声称解出了方程 $x^3 + px = q$ 。于是就在塔尔塔格里亚与德尔·弗罗二人之间安排了一次竞赛,结果塔尔塔格里亚轻易地就获胜了。塔尔塔格里亚所解出的方程中有(以现代的记号来表示):

$$x^3 + 9x^2 = 100 \quad (x = \sqrt{24} - 2)$$

$$x^3 + 3x^2 = 2 \quad (x = \sqrt{3} - 1)$$

$$x^3 + 4 = 5x^2 \quad (x = \sqrt{8} + 2)$$

$$x^3 + 6 = 7x^2 \quad (x = \sqrt{15} + 3)$$

然后塔尔塔格里亚重整精神去研究三次方程的问题,1541年,他掌握了处理 $x^3 \pm px^2 = \pm q$ 和 $x^3 \pm px = \pm q$ 类型的方程的一般方法。他仍然不想发表他的方法,因为他想他的成就应当为他当时所从事的工作增光。在这期间,当时最有天才的代数学家之一卡尔丹也用了相当多的时间研究这个问题,但没有成功。在最庄重的保密诺言之下,卡尔丹从塔尔塔格里亚那里得到了一份渴望已久的解法手稿。但是卡尔丹没有重视这项诺言。1545年,这个解法在他所著的 *Ars Magna* (《大法》)一书中发表了。塔尔塔格里亚从未有过机会对这一解法提出他的正当要求,因为这个解法一经问世之后,就立即被称为卡尔丹解法了。但以《大法》一书的丰富内容而论,卡尔丹并不仅仅是个掠美者。

这个方法可以简单地说明如下:所有的三次方程如有 x^2 项都可以消去,而化为 $x^3 + px = q$ 的形式^①。在这样简化后的方程中,令 $x = \sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n}$, 即

$$\begin{aligned} x^3 &= m - 3m^{\frac{2}{3}}n^{\frac{1}{3}} + 3m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{2}{3}} - n \\ &= m - n - 3(mn)^{\frac{1}{3}}x \end{aligned}$$

现在方程变为

^① 在方程 $x^3 \pm ax^2 + bx = c$ 中,令 $y = x \mp \frac{a}{3}$ 。

$$m - n - 3(mn)^{\frac{1}{3}}x = -px + q$$

当 $m - n = q, 3(mn)^{\frac{1}{3}} = p$ 或 $mn = \frac{p^3}{27}$ 时,可以满足这个方程。按此线索进行,即得

$$m^2 - 2mn + n^2 = q^2$$

$$4mn = \frac{4p^3}{27}$$

因此相加起来便得 $m^2 + 2mn + n^2 = q^2 + \frac{4p^3}{27}$

或
$$m + n = \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}$$

又因为 $m - n = q$,所以相加或相减后便得

$$2m = q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}},$$

$$2n = q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}},$$

因此便得到 x , 或

$$\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}}}.$$

卡尔丹曾以下列方程之解为例来说明这一方法:

$$x^3 + 6x = 20$$

他得到的解是

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10},$$

他把这个解写成了 RV:suR108p:10mRV:cuR108m:10。他还解过许多同样类型的方程。对于解方程

$$x^3 = px + q,$$

只要令 $x = \sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}$, 通过同样的程序他就得到了解:

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}}}.$$

但是,这里产生了一个意料不到的困难。因为在给定的方程中,如果最后一项一半的平方小于 x 的系数的三分之一的立方,则由上述方法得到的立方根是虚数。例如在解方程

$$x^3 = 15x + 4$$

时,他的方法给出 $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ 。

可是这方程显然可以为 $x = 4$ 和另外两个实数值所满足。当时卡尔丹已经知道三次方程的根不能多于三个。这一切令人十分困惑,以致卡尔丹说,有一种新型的数(复数)存在——后来纳披尔称之为实数的鬼魂。以后邦别利证明了方程 $x^3 = 7x + 6$ 有三个实根,即 3, -2, -1,但按卡尔丹的方法则得到

$$x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 - \frac{343}{27}}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{9 - \frac{343}{27}}}$$

这使得当时的数学家感到困惑。他们把这说成是不可约的情形,直到棣莫弗指出这些根是怎样得到的时候,问题才弄清楚。但是仍有一件稀奇的事:在实三次方程中,如果不经过程进出虚数领域的迂迴过程,就不可能用卡尔丹方法得到三个实数根。^①

《大法》一书充满了许多例子,表明卡尔丹是怎样处理各种类型的三次方程的。他把它们都化成了上述的标准型。例如在方程

$$x^3 + 6x^2 = 100$$

中,令 $x = y - 2$ 。于是方程变为

$$y^3 = 12y + 84$$

由他的方法得到

$$y = \sqrt[3]{42 + \sqrt{1700}} + \sqrt[3]{42 - \sqrt{1700}}$$

因此,减去 2 就得 x 。卡尔丹在第十七到二十三章中说明了如何处理四项俱全的三次方程消去第二项后得出的方程可以用他的方法解出。用这样的办法,完全解出了以下方程:

$$x^3 + 26x = 12x^2 + 12, (\text{cubus} \& 26 \text{res}, \text{æquantur } 12 \text{quadratis } p:12)$$

$$x^3 + 6x^2 + x = 14, (\text{cubus} \& 6 \text{quadrata} \& 1 \text{posito}, \text{æquantur } 14)$$

$$x^3 + 10x = 6x^2 + 4. (\text{cubus} \& 10 \text{res}, \text{æquantur } 6 \text{quadratis } p:4)$$

可以看出,卡尔丹习惯于把他的方程写成使所有各项都是正数的形式。

《大法》一书还载有四次方程的解法,它也是斐拉里所已经求出过的。问题的提法是:试求三个成连续比例的数,其和是 10,前两个数之积是 6(fac ex 10 tres partes in continua proportione, ex quarum ductu primæ in

① Turnbull, *Theory of Equations*, 123 页。

secundam producantur 6)。假定三数为 $\frac{6}{x}$, x , $\frac{x^3}{6}$, 于是我们有

$$\frac{6}{x} + x + \frac{x^3}{6} = 10$$

或

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$$

这个方程以前一直被认为是不可解的,但斐拉里成功地解出了它。他的解法如下:

将方程写成如上形式后,两边各加 $6x^2$,于是我们有 $x^4 + 12x^2 + 36 = 6x^2 + 60x$, 或 $(x^2 + 6)^2 = 6x^2 + 60x$ 。

现两边各加一表达式 $(x^2 + 6)2y + y^2$, y 是一待定的量。这给出:

$$(x^2 + 6 + y)^2 = (6 + 2y)x^2 + 60x + 12y + y^2$$

右边的表达式是一完全平方,如果

$$(6 + 2y)(12y + y^2) = 900$$

或

$$y^3 + 15y^2 + 36y = 450$$

由此可以求出 y 。于是我们有

$$x^2 + 6 + y = \sqrt{(6 + 2y)x^2 + 60x + 12y + y^2}$$

因为 y 值已知,所以这方程是不难解出的。

卡尔丹的解法遵循了同样的路线。他把以上方程写成

$$1 \text{ quad} \cdot \text{quad} . p : 6 \text{ quad} . p : 36 \text{ æqualia } 60 \text{ pos} .$$

$$\begin{array}{cccc} & 6 \text{ quad} & 6 \text{ quad} & \\ \hline 1 \text{ qd} . \text{ qdp} : & 12 \text{ qd} . p : & 36 \text{ æqualia} & 6 \text{ qd} . p : 60 \text{ pos} . \end{array}$$

并给出解为:

$$\text{RV cubica } 287 \frac{1}{2} p : \text{R} 80449 \frac{1}{4} p : \text{RV} : \text{cubica } 287 \frac{1}{2} m$$

$$\text{R } 80449 \frac{1}{4} m : 5$$

即为
$$\sqrt[3]{287 \frac{1}{2} + \sqrt{80449 \frac{1}{4}}} + \sqrt[3]{287 \frac{1}{2} - \sqrt{80449 \frac{1}{4}}} - 5$$

然而,卡尔丹还有一些别的方法处理四次方程。例如有人向他提出过方程 $x^4 + 4x + 8 = 10x^2$ 。他把每边减去 $2x^2 + 4x + 7$, 得到

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 8x^2 - 4x - 7$$

现在再把每边减去 $2y(x^2 - 1) - y^2$, 就得出

$$(x^2 - 1 - y)^2 = (8 - 2y)x^2 - 4x + (y^2 + 2y - 7)$$

如果使第一项与第三项的乘积等于第二项一半的平方,则得

$$(8 - 2y)(y^2 + 2y - 7) = 2^2, \text{或 } y^3 - 2y^2 - 15y + 30 = 0$$

令 $y = z + \frac{2}{3}$ 便可消去第二项。这就给出 $z^3 = \frac{49z}{3} - \frac{524}{27}$ 。它的解按规定是 $z = \frac{4}{3}$, 因此 $y = 2$ 。把这个值代入上式, 便给出

$$(x^2 - 3)^2 = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$$

或 $x^2 - 3 = \pm(2x - 1)$ 。卡尔丹只给出两个正根, 即 $\sqrt{5} - 1$ 和 $\sqrt{3} - 1$, 而弃去了两个负根。

斐拉里曾说明过怎样去解方程 $x^4 = x + 2$ 。卡尔丹对它的解法乃是从每边各减去 1, 然后每边除以 $x + 1$, 如果不考虑 $x = -1$ 的值, 则可得方程

$$x^3 + x = x^2 + 2, \text{或 } x^3 - x^2 + x = 2$$

令 $x = y + \frac{1}{3}$ 便可消去第二项。这使方程化为如下形式:

$$y^3 + \frac{2y}{3} + \frac{7}{27} = 2$$

$$\text{或 } y^3 + \frac{2y}{3} = \frac{47}{27}$$

按规则 y 的值是

$$\sqrt[3]{\frac{47}{54} + \sqrt{\frac{2 \ 209}{2 \ 916} + \frac{8}{729}}} - \sqrt[3]{-\frac{47}{54} + \sqrt{\frac{2 \ 209}{2 \ 916} + \frac{8}{729}}}$$

由此式即可确定 x 的值。

以上几个例子也可以说明卡尔丹所用的记号。他没有用什么符号来代表未知数, 未知数通常是用文字 *res* 来表示的, 有时是用 *positio*^①, 有时也用 *quantitas ignota*。未知数的连乘则以 *quadratus*, *cubus*, *quadratus quadratus* 表示, 并且常用简写。R 仍是用来表示根号, 它后面跟着 V(Universalis) 就表示整个式子开根。p 和 m 仍用来表示 *piu*(加) 和 *meno*(减)。应该指出, 这些只是简写, 它们都是代表普通的单字, 因此需要遵守造句规则。例如 p 后面不能跟 *res*, 而要跟它的夺格复数 *rebus*, 这是造句规则的要求。卡尔丹已经看出有负根, 并把它们称为 *虚构数* (*æstimationes vel fictæ*)。他是看出三次方程有三个根的第一个人。对方程 $x^3 + 10x = 6x^2 + 4$, 他求出的根是 $2, 2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}$, 并且注意到它们之和等于 x^2 的系数。由于他坚持把方程的各项全都排列为

① 常常写作 *pos*, 有时写作 *posito*。

正的,这就使他在确立方程各项的系数与其根之间的关系方面,不能再有过于此了。他始终没有提到三次方程一定有三个根,如果出现重根,他就认为只有两个根。例如他在解方程 $x^3 - 12x = 16$ 时,只给出了 -2 和 4 两个根,而不是 $-2, -2$ 和 4 三个根。同样,对于方程 $x^3 + 16 = 12x$,他只满足于 $x = 2, -4$,而我们应当预期有 $2, 2, -4$ 。因此,很难看出他是怎样能像康托尔所提出的那样,熟悉用观察方法确定方程正负根的个数的。有个地方表明卡尔丹已经熟悉虚根,因为他正确地解出了下列问题:试将 10 分作两数,使其积为 40 。他的解是 $5p: Rm: 15$ 和 $5m: Rm: 15$,即

$$5 + \sqrt{-15} \text{ 和 } 5 - \sqrt{-15}$$

卡尔丹是天才和蠢才的奇怪的混合。“他禀赋聪慧,既有才华焕发的想像力,又不断钻研各种学问;是个雄辩家,又是个博物学者;是几何学家,又是代数学者;是天文学家,又是星象学者;是医药专家,又是外科圣手;是道学家,又是语言学者。”^① 他是一个天生的赌徒,曾发表过一本论机会对策的著作 *De Ludo Aleæ* (《论骰子游戏》),其中可以很清楚地看到概率论的开端。

博洛尼亚人拉斐罗·邦别利,大力推进了代数的发展,特别是在符号的改进方面。1572年,他在威尼斯出版了一本代数,又于1579年重印 *L' Algebra Opera* (《代数运算》)。所谓“不可约的”三次方程的根的现实性,就是在这本书里得到证明的。书中最重要的特点是改进了记法,尤其是改进了表示幂的方法,并把幂通称为“高位”(dignita)。这里我们可以看到对于指数记法的最初探讨。他把未知数称作“若干”(Tanto),用符号 1 表示,它的幂则以如下所示的方法来表示:

“高位”的名称及其简写:

	Tanto
	Potenza
	Cubo
	Potenza di Potenza
	Primo relato
直至	Cubo di potenza di potenza

1
2
3
4
5
12

^① Montucla, i, 570/1

开根仍以根号 R 来表示,后面跟上字母 q (quadrata), c (cubo) 等即表示平方根、立方根等。例如我们看到有 R.q (radice quadrata, 平方根), R.c (radice cubica, 立方根), RR.q (radice quadro quadrata, 四次方根), R.q.c (radice quadra cubica, 五次方根)。(RR.q 显然是 R.qq 之误印)。p 和 m 还是表示加法和减法,相等仍然没有符号来表示。但书中采用了新的符号来表示整个式子的开根 (radix universalis)。为了表示整个式子的开根,邦别利使用了一个应当看做现代括号之前身的符号。例如他曾把

$$\sqrt[3]{4 + \sqrt{2}} + 2$$

写成 $R.c[4.p. R.q.2]p.2$

邦别利的著作中尽是例题,其中一个典型例题是:试求二数,其积是 8,而其平方之差是 24。不难证明较小的解是 $\sqrt{-12 + \sqrt{208}}$ 。邦别利把它写成了 R.q[R.q 208 m.12, 负值被弃去了。此外我们看到,末尾半个括号也省掉了。

邦别利曾用取完全平方的办法来解二次方程,但和上一例题中一样,他弃去了负根。即使两个根都是正根,他也只承认有一个根。在这种情况下,他认为产生这方程的那个问题会指示出应当取哪个根。他处理三次方程的方法是仿照卡尔丹的,但已注意到三次方程可以有一个、两个或三个根。他还看出了,方程 $x^3 - bx + c = 0$ 导致一个角的三等分问题。

邦别利是这个时期对代数发展有着杰出贡献的最后一位意大利数学家。虽然意大利的最大注意力是放在代数上,但她在几何方面的贡献也颇为显著。墨西拿的数学教授法兰西斯卡斯·摩罗利卡斯 (1494 ~ 1575) 是当时最伟大的几何学家之一。除了贡献出许多有价值的译本和注释之外,他还编过一本颇有价值的论圆锥曲线的论著。在这本著作中,他认为圆锥曲线乃是锥面被平面所截的截线,这正是在笛卡儿的几何学出现 (1637) 之前所有其他各家的说法。摩罗利卡斯还作过尝试去恢复阿普罗尼亚斯的第五卷,那是这位伟大的希腊几何学家处理极大极小这个难题的一卷书。摩罗利卡斯的伟大著作 *Opuscula Mathematica* (《数学演算》) 在 1575 年出版于威尼斯。他还研究过许多有数学背景的光学问题如 *Photismi de Lumine et Umbra* (《光的幻像和阴影》, 1611), 并且对于虹的形成已经作出非常接近于正确的解释。

在韦达之前,唯一有名的法国数学家是彼得·累马斯(1515 ~ 1572)。他对古代的几何学显示出有渊博的知识,并且重新引起了人们对于圆的求积问题的兴趣。

现在我们转向德国。直到 17 世纪,代数都没有在德国得到广泛发展,但是德国至少也产生了一位对代数有着具体贡献的数学家,这就是迈克尔·史替福(1486 ~ 1567)。他做过一个时期的修道士,后来当了路德的弟子,此人曾因作出对《圣经》的预言而被判入狱。1544 年,他的 *Arithmetica Integra* (《算术大全》)一书出版于纽伦堡,从书中可以看出,这本书的重要性也是在于它在记法上有了显著改进。史替福用 + 号和 - 号代替了 p 和 m。这些符号早在 1489 年就已由约翰·韦曼提出过,但是迟迟未被采用。史替福引用一种全新的方法来表示幂次,他在上述著作中解释道:“在代数中用这些符号来计算,是代数的一大进步。”^① 接着便是 zensus, cubus, zensizensus, sursolidus 等德文字的缩写:

$$1 \quad 1^{\circ} \quad 1^{\circ\circ} \quad 1^{\circ\circ\circ} \quad 1^{\circ\circ\circ\circ}$$

这被推广到开根,表示连续开根的方法是在上列符号前面加上根号 $\sqrt{\quad}$ 。史替福后来在另一本著作 *De Algorithmi Numerorum Cossicorum* (《代数记数法》)的第三章中,曾提出重复使用同一个字母来表示连续幂次,例如 1A, 1AA, 1AAA, ……这是一个显著改进,但没有通行起来,直到 1631 年哈里欧在其 *Artis Analytic Praxis* (《分析术实例》)一书中引入了一种类似的记法后,才被普遍采用。

史替福的著作中尽是一些导致解二次方程的问题。他习惯于按未知数的幂降来排列各项,然后使之等于零,并且一向不乐于处理负根,只要可能,他总要避免它们。

1553 年,史替福发表了克拉斯多夫·鲁道夫在 1525 年编写的 *Die Coss* (《代数》)。这一著作中是以符号 $\sqrt{\quad}$ 代表平方根, $\sqrt[3]{\quad}$ 代表立方根, $\sqrt[4]{\quad}$ 代表四次方根。四次方根的符号显然是平方根符号的重复,即 $\sqrt{\sqrt{\quad}}$ 。

德国仅有的另一位著名数学家是耶稣·克里斯多夫·克雷弗斯(1537 ~ 1612)。他虽然是巴伐利亚邦的班堡人,但其一生大部分是在罗马度过的。1580 年左右,他写了一本代数学,其中所用的符号和叙述方法都是仿照史替福的。他提出了许多有关方程的问题,但是从来没有试图超出二次方程以外。他还出过一版欧几里得的《几何原本》。

^① *Arithmetica Integra*, 235 页。

然而,最有价值的是他的改进历法的工作。

低地国家^①有两位数学家的工作对这个时期的数学发展作出了巨大贡献。他们是布鲁日的西门·斯特文(斯特文那斯,1548~1620)和荷兰的亚尔伯·吉拉德(1595~1632)。前者是系统地处理小数最早的一个人,他在静力学这门自从阿基米得以来一直停滞不前的科学上贡献甚至更大。这两方面我们将依次加以介绍。现在我们先来看看他在代数和算术方面的贡献,这些贡献既精巧又有独创性,而且在记法的发展上迈出了极为重要的一步。我们所见到的主要革新就是用指数来表示幂。斯特文抛弃了平方再平方之类的表示方法,而采用以邦别利记法为基础的概念。例如我们在其 *Premier Livre d'Algèbre de Diophante d'Alexandrie*(《亚历山大学派的狄奥芬塔斯的代数》)一书的前面所看到的下表可以说明这点:

名 称	缩写	指数
数	N	①
平方	Q	②
立方	C	③
平方的平方	QQ	④
立方的平方	QC	⑥
立方的立方	CC	⑨
单位数	V	

在 *Briefve Collection des Caracteres qu'on usera en Ceste Arithmetique*(《常用算术记号一览表》)中,他还提出了其他一些记法上的改进。下面的记号是其中一部分:

√	平方根
W	四次方根
WW	八次方根
WWW	十六次方根
√③	立方根
W③	九次方根
√④	四次方根
W④	十六次方根

① 比利时、荷兰、卢森堡的总称。——译注。

到这时,用“+”号和“-”号表示加法和减法已经日益普遍了。斯特文写道:“代表加和减的记号如下:

$$\begin{array}{ll} + & \text{加} \\ - & \text{减。} \end{array}$$

在表示相等时,斯特文常把整个词都写出来,但有时是在两数之间用“:”号表示它们相等。和邦别利一样,斯特文也没有用“整式根号”RV来表示几项一起开根,而是根据根号内所包括的项数,在根号后面加上文字 bino(两项)、trino(三项),等等。例如:

$\sqrt{\text{bino} 2 + \sqrt{3}}$, c'est à dire racine quarrée de binomie, ou de la somme de 2 & $\sqrt{3}$, 即

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$\sqrt[3]{\text{bino} \sqrt{2} + \sqrt{3}}$, c'est à dire racine cubique de binomie $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, 即

$$\sqrt[3]{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

$\sqrt{\text{trino} \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5}}$, c'est à dire racine quarrée de trinomie, 即

$$\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5}}$$

鄂雷森曾含糊地提出过分数指数的概念,后来斯特文重新提出了它,他似乎没有用过这种指数,但在他的脑海中显然是有这种想法的,他曾写道:“但是圆圈中的 $\frac{1}{2}$ 应是①的平方根的标记。(因为按照其他数的乘法法则)这个数的自乘其积为①,从而,一个圆圈中的 $\frac{3}{2}$ 应是③的平方根的标记,因为这样的圆圈中的 $\frac{3}{2}$ 自乘,其积为③,并依此类推。”^①

斯特文对三角学也有显著贡献。在他发表的著作中,可以看到有关平面与球面三角形的三角学的详尽讨论。在说明球面三角形的解法时,他证明了球面三角形的三内角大于两直角(命题 14)。这在雷乔蒙塔努斯的著作中已经基本上有了,但斯特文的处理更为详尽。可以预期,他在度量角度时仍然是使用“指数”记法。例如,他曾把 $42^{\circ}16'37''$ 写成 42 度 16①37②。

① 斯特文: *Œuvres Mathématiques*, 6 页。

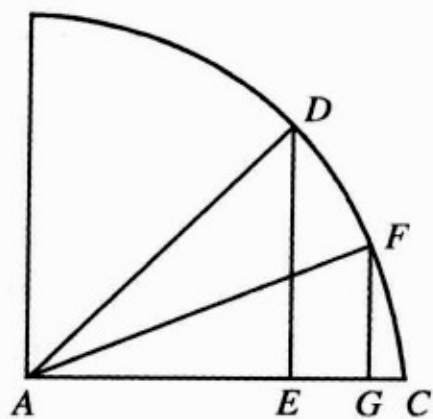


图 12

斯特文还提出了一种确定角的正弦的方法。要记住,角的正弦当时仍被认为是长度,而不是一个比值。“正弦是在一个角所张弧的末端所作垂直于直径的直线”,他求这一“直线”的方法如下:选取1 000 000 000或 10^9 作为圆的半径,然后求出“从一个角所张弧的末端作垂直于直径的垂直线的长度”,即直线DE。(图12)在 45° 角的情况下,DE显然是707 106 782,这就是 45° 的正弦。如果要求 22.5° 的正弦,可将DC平分于F点,作FG垂直于AC。然后将半径的一半($= 500\,000\,000$)乘以EC,即乘以 $AC - AE$ 或 $AC - ED$,亦即 $1\,000\,000\,000 - 707\,106\,782$,乘积是146 446 609 000 000 000。这个数的平方根(382 683 482)就是 22.5° 的正弦。这与关系式 $\sin 22.5^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos 45^\circ)}$ 显然是相当的。按此方法进行,斯特文编成了一个间隔为 $45'$ 的从 0° 到 90° 角的正弦表。

亚尔伯·吉拉德在数学史中的重要性并不亚于斯特文。他的伟大著作 *Invention Nouvell en L' Algèbre* (《代数的新发明》)一书首次发表于1629年。这是那个时期数学上的一个有价值的贡献,其中可以看到他对当时所用的记法有许多进一步的改进。吉拉德用“+”号代表加法,用“-”号代表减法(“+”号称为加,等于我们说“和”或说“再”,“-”或“÷”号是指减),“=”号不是用来表示相等,而是指两数之差。他还引入两个新符号,即ff和§,前者表示大于,后者表示小于。他表示幂的方法是仿照斯特文的。例如他曾把 $x^3 = 12x - 17$ 写成“1③等于12①-17”。从这本著作可以看出吉拉德关于负根的知识比当时任何其他作者阐述得更完全。他用配方的方法来解二次方程,给出了正根和负根(如有负根存在的话)。他还注意到方程的解有时是不可理解的。“最后,当②等于①-①(即 $x^2 = x - x^0$)时,这个方程甚至是不可能的,正如1②等于6①-25(即 $x^2 = 6x - 25$)时,1①的值(即x的值)是不能解释的,亦即或是 $3 + \sqrt{-16}$,或是 $3 - \sqrt{-16}$ 。”在仿照卡尔丹研究了三次方程和四次方程以后,他推断出n次的方程一定有n个根。他不是第一个注意到这一点的人,也没有试图去证明这个重要的

定理。他所说的是：“设一完全方程 $1④$ 等于 $4③ + 7② - 34① + 24①$ ，则指示最高幂值的标记是④，这就表明：有四个确切的解，并且既不少也不多，例如 1, 2, -3, 4，其情形是使第一个符号的数乘以 4，成为各解的第一部分，第二个符号则乘以 7，并顺序依次而下。但是为了把情况看得完全，须取记号使之标志交替的顺序，如

$$1④ - 7② - 24① \text{ 等于 } 4③ - 34①$$

同样，如果 $1④$ 等于 $4① - 3$ ，那么四个部分将是 0, 0, 4, 3，从而那四个解将是 1, 1, $-1 + \sqrt{-2}$, $-1 - \sqrt{-2}$ 。（注意最后两者之积是 3。）”

在他的一本论三次方程的著作的前部，他说：“①的系数的 $\frac{1}{3}$ 的立方必须小于①的系数的 $\frac{1}{2}$ 的平方，否则这个方程便是不合理的和不适当的。”我们还记得，用卡尔丹法则求出的这个方程的解含有负数的平方根，因此这一直被认为是“不可约情形”，虽然邦别利已经指出过这种情形下有一个实根。吉拉德后来也认识到，像 $x^3 = 13x + 12$ 这样的方程，按照卡尔丹法则所求出的解含有负数 $36 - \frac{2 \cdot 197}{27}$ 的平方根，但 x 的实数值也满足它。吉拉德在其著作的较后部分运用 $\sin 3\theta$ 和 $\sin \theta$ 之间的关系提出了解这个方程的一个巧妙方法。如果用现代的记号写出来，他的解法如下：

令 $x = y \sin \theta$ ，于是方程变为

$$\sin^3 \theta - \frac{13 \sin \theta}{y^2} - \frac{12}{y^3} = 0$$

现在 $\sin^3 \theta - \frac{3}{4} \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 3\theta = 0$ ，因此比较这两个式子后我们有

$$\frac{13}{y^2} = \frac{3}{4}$$

和

$$\frac{1}{4} \sin 3\theta = -\frac{12}{y^3}$$

因此

$$y = \sqrt{\frac{52}{3}}, \sin 3\theta = -0.665 \ 135$$

亦即

$$3\theta = 41^\circ 41' 37'' + 180^\circ, \text{ 即 } 221^\circ 41' 37''$$

或

$$\theta = 73^\circ 53' 52''$$

① 即 $x^4 = 4x^3 + 7x^2 - 34x + 24$ 。——译注

而 x 或

$$\begin{aligned} y \sin \theta &= \sqrt{\frac{52}{3}} \sin 73^\circ 53' 52'' \\ &= \frac{\sqrt{156} \times 0.960\,78}{3} \\ &= 4. \end{aligned}$$

吉拉德的原来的解说如下：

“假定 $1\textcircled{3}$ 等于 $13\textcircled{1} + 12$

$\textcircled{1}$ 的 $\frac{1}{3}$ 是 $4\frac{1}{3}$, $\textcircled{0}$ 的 $\frac{1}{2}$ 是 6, 它的平方根是小数 20 816 $\textcircled{4}$ ^①。以 100 000

为 6 的伸张倍数得它们的乘积 ($4\frac{1}{3}\sqrt{4\frac{1}{3}}$ 是 90 203 $\textcircled{4}$ (除数), 二者之积 600 000 (被除数), 现在有了除数和被除数, 因此我们获得商为 66 515, 反正弦为 $41^\circ 41' 37''$ 。按规则加上 180° , 总数为 $221^\circ 41' 37''$ 。它的 $\frac{1}{3}$ 为 $73^\circ 53' 52''$, 它的正弦为 96 078, 它的双倍为 192 156, 乘以 20 816 $\textcircled{4}$, 得 400 000, 再除以伸张倍数 100 000 便得 $1\textcircled{1}$ 的主值为 4。”

他知道另外还有两个根; 为了求出这两个根, 他把原来的方程化成了二次方程 $x^2 + 4x + 3 = 0$, 因此得到 $x = -1$ 和 -3 。^②

吉拉德还解出了方程 $x^3 = -6x + 20(1\textcircled{3} \text{ 等于 } -6\textcircled{1} + 20)$, 解是 $\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$, 它可化为 $x = (1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})$, 或 2。他补充说: “不要为我在前面所列的事物没有意义而奇怪, 如 $10 - \sqrt{108}$, 它的 \sqrt{c} 是 $1 - \sqrt{3}$, 这是为了说明前面的情况的普遍性。”

然而, 一般说来, 他是仿效斯特文的方法来表示开根, 只是往往在紧靠根号的后面加一数字以表示开根的次数, 例如 $\sqrt{3}26 + \sqrt{675}$ 即代表 $\sqrt[3]{26 + \sqrt{675}}$ 。有时他又指出, 数字也可以放在根号里, 就和现在的记法一样。他把这种方法推广到分数指数上, 可以明显地从他下面所说的话中看出: “由于 $\sqrt{\quad}$ 号已经习用, 我们可以用它来代替 $(\frac{1}{2})$ 以表示二次方根或平方根。按照这种方法, 我们可以用 $\sqrt[3]{\quad}$ 或 $(\frac{1}{3})$ 来表示立

① 参看下文斯特文的小数记法。

② 因为还有两个值, 每一个都是由“-”号造成的, 其程序是应用已经得出其值为 4 的 $\textcircled{1}$, 用这个 4 除那给定为 12 的 $\textcircled{0}$, 得商 3; 以“-”号加于每一个数, 于是按规则 $1\textcircled{2}$ 等于 $-4\textcircled{1} - 3$, 两个值将分别为 -1 和 -3 。

方根或三次方根。”

吉拉德著作的一个明显特点就是在笛卡儿的 *La Géométrie* (《几何学》) 问世 8 年之前, 他就已经指出了负根在几何学中的用处, 他写道: “对小于 0 的解应在几何学中往后退来解释, 而大于 1 则要往前加。”

这个世纪最伟大的代数学家是法国人佛兰西斯·韦埃特 (1540 ~ 1603), 其拉丁名字韦达更为世人所知。他出生于普瓦图, 学完法律后, 曾在亨利三世和亨利四世王朝中任职过一段时期。后来他对数学的兴趣发展起来, 1589 年, 发表了 *Canon Mathematicus seu ad Triangula cum Appendicibus* (《数学公式和三角法及附录》), 这是对三角学的一个巨大贡献。书中除了对三角形的解作了精辟的讨论之外, 还叙述了三角函数和倍角三角函数之间的关系, 即 $\sin n\theta$ 和 $\sin \theta$ 之间的关系。他有效地利用后者解出了亚得里安·丰·鲁曼 (也称亚得里安纳斯·鲁曼纳斯或亚得里安·鲁曼) 所提出的 45 次方程。这个方程用现代的记法写出来就是:

$$A = 45x - 3\,795x^3 + 95\,634x^5 - 1\,138\,500x^7 + \cdots + 740\,259x^{35} \\ + 111\,150x^{37} - 12\,300x^{39} + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45}$$

韦达看出它的解依赖于 $\sin 45\theta$ 与 $\sin \theta$ 之间的关系。因为如果 A 是 2θ 角所张弧上的弦长, 则 $A = 2\sin \theta$ 。如果 B 是 $\frac{2\theta}{45}$ 角所张弧上的弦长,

则显然有 $B = 2 \sin \frac{2\theta}{45}$ 。

现在, $\sin n\theta$ 可用一系列按 $\sin \theta$ 的升幂排列的项来表示, 其展式可表如下式:

$$\sin n\theta = n \sin \theta - \frac{n(n^2 - 1^2)}{3!} \sin^3 \theta + \\ \frac{n(n^2 - 1^2)(n^2 - 3^2)}{5!} \sin^5 \theta + \cdots$$

因此

$$2 \sin 45\theta = 2 \left\{ 45 \sin \theta - \frac{45(45^2 - 1)}{3!} \sin^3 \theta + \right. \\ \left. \frac{45(45^2 - 1^2)(45^2 - 3^2)}{5!} \sin^5 \theta + \cdots \right\}$$

如 $x = 2 \sin \theta$, 则右方变为

$$45x - 3\,795x^3 + 95\,634x^5 + \cdots$$

因而若令 A 为 $2 \sin 45^\circ$, 这就是已知的方程。韦达总共给出 x 的 23 个

值,负值被弃去了。

然而韦达之所以闻名,主要是靠他的 *In Artem Analyticam Isagoge* (《分析术入门》)一书。通常认为这是一部最早的符号代数的著作。书中使用了字母表示数量,包括已知数和未知数。从一次幂起,以后各次幂都是用文字来表示的,例如 *latus* 是指 1, *quadratus* 是指 2, *cubus* 指 3, *quadrato - quadratus* 指 4; 在第 1 以后这些字又被简写为 Q, C, QQ, QC, CC 直到 CCC。辅音字母被用来代表已知数,元音字母 A, E, I, O, U, Y 则用来代表未知数。没有用什么符号表示相等,也没有一个符号表示相乘,这些运算是用文字来说明的。“=”号是出现了,但它所指的不是相等,而是指两个不知孰大孰小的两数之差。

韦达在后来的一部著作 *De Aequationum Recognitione et Emendatione* (《方程的认识和订正》, 1615) 中表明,他对卡尔丹解三次方程的方法是熟悉的。他仿照卡尔丹提出了在没有缺项的方程中消去第二项的一般方法,这样把方程化为 $x^3 + ax = b$ 的形式后,再令

$$a = 3(y^2 + xy), \text{ 或 } x = \frac{a - 3y^2}{3y}$$

于是方程变为

$$\frac{a^3 - 9a^2y^2 + 27ay^4 - 27y^6}{27y^3} + \frac{a(a - 3y^2)}{3y} = b$$

它可化为一个 y^3 的二次方程:

$$y^6 + 6y^3 - \frac{a^3}{27} = 0$$

因此

$$y^3 = \frac{1}{2} \left\{ -b \pm \sqrt{b^2 + \frac{4a^3}{27}} \right\}$$

由此式即可确定 x 的值。韦达总是不考虑根的负值。

在数字例子中,韦达没有再用元音字母代表未知数。我们发现他用字母 N(*numerus*)来代替它们了。其记法可用下列几个例子来说明:

$$1. x^3 + 81x = 702 (\text{Si } 1C + 81N \text{ 等于 } 702)$$

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{351 + \sqrt{123\,201 + 19\,683}} - \sqrt[3]{-351 + \sqrt{123\,201 + 19\,683}} \\ &= \sqrt[3]{351 + 378} - \sqrt[3]{-351 + 378} \\ &= \sqrt[3]{729} - \sqrt[3]{27} \\ &= 9 - 3 = 6 \end{aligned}$$

$$2. x^3 + 5x^2 - 4x = 20(1C + 5Q - 4N \text{ 等于 } 20)$$

令 $x = y - \frac{5}{3}$ 即可消去第二项, 得到

$$y^3 = \frac{37y}{3} + \frac{110}{27}$$

因此 $y = \frac{11}{3}$, 即 $x = 2$ 。负值 $-5, -2$ 被丢掉了。

$$3. x^3 - 4x^2 + 5x = 20(1C - 4Q + 5N \text{ 等于 } 20)$$

只给出了 $x = 4$ 一个根, 另外两个根丢掉了(这种情形是虚根)。

$$4. 10x^2 + 20x - x^3 = 8(10Q + 20N - 1C \text{ 等于 } 8)$$

给出了两个根, 即 $6 + \sqrt{32}$ 和 $6 - \sqrt{32}$, 均为正数, 第三个根($x = -2$)丢掉了。

韦达在第十四章中提出了四个定理, 清楚地说明了方程的根与其各项系数之间的关系。但他一贯拒绝处理负根, 对他来说负根是不能理解的, 因此他的研究缺乏完整性。

韦达对斐拉里解四次方程的方法也作了显著的改进。他从方程

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

出发, 把它写成了

$$x^4 = -c - ax^2 - bx$$

两边再加上

$$x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4$$

$$\text{于是} \quad (x^2 + \frac{1}{2}y^2)^2 = x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 - c - bx - ax^2$$

$$= x^2(y^2 - a) - bx + (\frac{1}{4}y^4 - c)$$

若 $b^2 = y^6 - ay^4 - 4cy^2 - 4ac$ 对 y^2 而言是一立方, 则上式右端为一完全平方。韦达用这个方法解出了下列方程:

$$x^4 - x^3 + x^2 - x = 10 \quad (x = 2)$$

$$44x^2 + 720x - x^4 = 1600 \quad (x = 2 \text{ 和 } 10)$$

要注意, 负根还是被忽视了。

对于希腊人的齐次原则, 韦达仍然是坚持的, 按照这个原则, 两线段的乘积应看做面积。因此线段只能和线段相加, 面积只能和面积相加, 体积只能和体积相加。他不了解算术的二次幂 a^2 可以代表面积, 也可以代表长度, 算术的一次幂可以代表长度, 也可以代表面积。一直到 1637 年笛卡儿的《几何学》一书出版之后, 才把这些关于维次的限制取消掉。所以我们在韦达的书中可以看到(定理一): Si A cubus +

B in A quadratus 3 + D plano in A 等于 B cubo 2D plano in B. A quad + Bin A² 等于 Bquad 2 - D plano。

韦达还有一本书,叫做 *De Numerosa Potestatum ad Exegesis Resolutione* (《解决各种乘幂解释》,1600),书中提出了一种求方程近似根的方法。他也参加过当时盛行的化圆为方者的一伙。他仿照阿基米得的方法证明了圆周与其直径之比大于 3.141 592 653 5,小于 3.141 592 653 7。他还想出了一种用无穷乘积表示上述比值的方法,即

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$$

至无穷。韦达的全部著作曾由万·舒腾在 1646 年发表过,总题名为 *Opera Mathematica* (《数学运算》)。

至于英国学派的贡献,直到当时还是微不足道的。卡司柏忒·邓斯托(1474~1559)发表过一本算术书,虽然其内容大部分是取材于意大利,但也有一些独创的东西。罗伯特·里柯德(1510~1558)发表了一本极为流行的 *Ground of Artes* (《艺术基础》)。还有一本 *Whetstoen of Witte* (《智慧的激励》),也风行一时。这本著作之所以引起人们的兴趣,是因为书中用“=”号这个重要符号来表示相等。另一本更为流行的著作是威廉·乌特勒(1574/5~1660)的 *Clavis Mathematicæ* (《数学入门》)。这本书在英国广泛传诵,玻意耳和牛顿二人曾对其备极赞扬,而沃利斯竟把他的 *Arithmetica Infinitorum* (《无穷算术》)一书献给乌特勒。可是《数学入门》这本书对数学并没有什么推进作用,因为作者所研究的方程不超过二次,而且他还忽视了负根。此外,该书文体晦涩,作者在书中使用的符号过多,总共使用了不下 150 个不同的符号。其中包括:

×	代表乘
::	代表比例
∴	代表连比例
⊃	代表大于
⊂	代表小于

只有前两个符号保存了下来。

托马斯·哈里欧(1560~1621)作了比较多的具体贡献。他的 *Artis Analyticæ Praxis* (《分析术实例》)一书是在他死后,于 1631 年出版的。哈里欧曾随同华尔脱·拉里爵士到弗吉尼亚去探险,回来后就从事数

学研究,数学上的一些显著进展应归功于他,特别是在方程论方面。约翰·沃利斯(1616~1703)曾不厌其烦地断言说:笛卡儿著作中的内容很少是《实例》一书中所没有的。这位著名的数学家写道:“哈里欧为笛卡儿(虽然没有指名)的代数学或几何学奠定了最大部分(即使不是全部)的基础。如果没有这个基础,(我怀疑)笛卡儿的整个上层建筑就决不会有。”这个说法虽远不是真实的,但应承认哈里欧对方程的研究贡献很大。哈里欧除了仿效卡尔丹的方式解出了许多方程之外,还说明了如何由二项式因子来建立方程,例如若 $x = a$ 和 $x = b$, 则 $(x - a)(x - b) = 0$ 。按此,他说明了怎样把一些方程分解为简单的因子。但由于他不承认有负根或虚根,所以不能说明每个方程都可以分解。他还给出了一些高至五次的方程的数字结果。他一贯忽略负根(否定数, *priva-tives*),他认为负根是没有用的(*tamquam inutiles negliguntur*)。他认为虚根是不可能的。

哈里欧在记法方面作了些改进,在《实例》一书中可以看到“>”号代表大于,“<”号代表小于。

“大于的记号: $a > b$ 表示 a 量大于 b 量;小于的记号: $a < b$ 表示 a 量小于 b 量。”

其他改进可以从下例中看出:

$$\begin{aligned}
 52 &= -3 \cdot a + aaa \cdots a = 4 \\
 a &= \frac{\sqrt{3 \cdot 26 + 675} + \sqrt{3 \cdot 26 - 675}}{2 + \sqrt{3} + \cdots + 2 - \sqrt{3}} \\
 &\quad \quad \quad 4 \\
 270 &= +9a + aaa \cdots a = 6 \\
 a &= \frac{\sqrt{3 \cdot 18252 + 135} - \sqrt{3 \cdot 18252 - 135}}{\sqrt{12 + 3} + \cdots - \cdots + \sqrt{12 - 3}} \\
 &\quad \quad \quad 6
 \end{aligned}$$

应该注意到,该书最显著的特点是书写幂次的方法,在史替福使用大写字母的地方改用小写字母,系数与用文字表示的数量之间用点隔开,以及立方根的写法,即 $\sqrt{3}$ 。

1600 年可能是数学史上最重要的一个世纪的开端。毫无疑问,没有哪个时期能与这个时期的成就相比。笛卡儿在此四年前出生,在这一世纪头几十年里,又有帕斯卡和费尔马诞生。这三个人是注定要改

(1)



Notæ seu symbcla quibus in sequen-
tibus utor:

Æquale =	Simile <i>Sim.</i>
Majus \sqsupset .	Proxime majus \sqsupset .
Minus \sqsubset .	Proxime minus \sqsubset .
Non majus \sqsupset .	Æquale vel minus \sqsupset .
Non minus \sqsubset .	Æquale vel majus \sqsubset .
Proportio, five ratio æqualis ::	
Major ratio $\text{---} \text{---}$.	Minor ratio $\text{---} \text{---}$.
Continuè proportionales $\text{---} \text{---}$.	
Commensurabilia --- .	
Incommensurabilia --- .	
Commensurabilia potentiâ --- .	
Incommensurabilia potentiâ --- .	
Rationale, $\rho\eta\tau\omicron\nu$, R, vel κ .	
Irrationale, $\epsilon\lambda\omicron\gamma\omicron\nu$, κ .	
Medium five mediale --- .	
Linea secta secundum extremam	}
& mediam rationem	
Major ejus portio σ	
Minor ejus portio τ .	
Z est A + E.	Σ est a + e.
X est A - E.	Ξ est a - e.

A 2

Z est

乌特勒的《数学入门》(1631)。(蒙皇家学会赐予转载)

变整个数学面貌的,他们最大的贡献是在几何方面。下一章就要详细叙述他们的工作。

第七章

17 世纪:几何学的新方法

我们已经看到,在 16 世纪期间大多数数学科目都有了具体的进展:代数方面产生了精巧的符号系统,三次方程与四次方程的解法已被熟练掌握;负根甚至虚根也被认识到了,并被给予适当地位;三角学已不再是天文学的产物,而发展成为一门独立科学。但是几何学方面的进步不太显著,直到当时还没有出现什么东西能预示下一世纪的划时代发现。

新世纪的开始预告了一个更为壮观的发展,这在几何方面最值得注意。不仅旧科目得到了恢复和积极扶植,而且出现了被人们所热烈探索的新部门。代数方法在几何学上的应用也许是一项杰出成就,这一步导致一种新的有力的工具,即解析几何学的臻于完善。与此同时,几何学中一种崭新的方法——射影几何——出现了,这就开发了一处非常丰富且至今尚未耗尽的宝藏。同时,古代的求积问题导致极微分割方法被引入几何学,这就开创了一个研究方向,并在 17 世纪最后几十年终于导致微积分的发明。

但是,这个世纪之所以成为数学史上一个光辉的时期,并不是仅仅由于几何学的深远发展。这个时期数学家的活动领域很多。在头几十年,由于小数的应用与对数的发明,计算方法得到了有力的推动。不久以后,便是对数论这个重要理论的初次系统地探索,以及对概率论这个同样重要的理论的基本原理的研究。力学终于开始吸引数学家的注意了。运动规律的问题解决了,落体的加速度经过了试验,抛射体的运动开始为人们所理解。在流体静力学方面以公式形式提出了几个关于流体压强的重要定理。然而,这张目录表看起来尽管给人以深刻印象,但仍然难以涵盖与下半世纪那些重大的发现。

人们对几何学如此感兴趣,似乎是由于再次力图确定曲线所包图形面积。特别是用圆半径来表示圆面积的问题(这个问题在上一世纪已经吸引了数学家的注意),它引导出一种崭新的研究方法,即极微分割的方法。大家记得,希腊人(特别是欧铎克色斯和阿基米得)为了求出一条曲线所包任意图形的面积,曾借助穷竭法,他们由于熟练地应用了这个方法而获得许多正确结果。但因为这个方法本身笨拙不便,所以后来一直未被利用,直到16世纪才又重新引起重视。布鲁日的斯特文那斯在试图确定三角形的重心时,曾采用了一种类似于古人所用的求法。但最有力的推动力却是来自开普勒(1571~1630)^①。他在探索行星运动的规律时(*Astronomiæ Pars Optica*,《天文学中的光学》,1609),曾遇到如何确定一个椭圆扇形的面积和椭圆弧长的问题。从他力图发现确定酒桶容量的方法中,可以看出这类问题引起了他的注意。他在*Nova Stereometria Doliorum Vinariorum*(《新测定酒桶体积法》,1615)一书中曾引入无穷大与无穷小的概念,来代替烦琐的穷竭法。大家记得,希腊人对这些观念一直是感到头痛的,他们认为那是铺下了一条令人疯狂的道路。然而,由于开普勒用日常的语言引入这些概念,这就使它们可以为大家所接受。他是考虑一个由无数个三角形构成的圆,其中每个三角形的顶点都处在圆心,圆周是由它们无穷小的底边构成。同样,圆锥体可以看成是由大量具有共同顶点的棱锥体所构成,圆柱体是由大量棱柱体所构成,这些棱柱体的底边构成圆柱体的底边,它们的高就是圆柱体的高。开普勒采用这些观念得出了一些古人费尽劳苦而极难得到的结果。他的方法中缺少关于极限的明确概念,也缺少有效的求和方法,但可导致正确的结果,这对开普勒来说已经足够了。

然而,尽管有这些缺点,开普勒的方法仍然开辟了一个广阔的新思路。开普勒未能成功地解决他自己提出的某些较难的问题,这激励了他的年轻的同时代人博洛尼亚的数学教授波纳凡妥拉·卡佛来利(1598~1647)更进一步地去发展这些方法。在*Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova Quadam Promota*(《新发展的极微分割几何学》,1635~1653)这篇论著的第二部分,卡佛来利假定一条线可以看成是无数个点的集合,面是无数条平行直线的集合,立体是无数个平行面的集合。

① 原文印错,开普勒在世年代为1571~1630年。——译注

他把这作为一条公理规定下来:无数这样的线(或面)之和与同等数量的、每条都等于其最大者的线(或面)之和,彼此成一定的比。例如要确定一个面就相当于求出所有构成此面的平行直线之和,同样,立体的体积可归结为求出所有构成此立体的平行平面之和。在三角形的情形下,要确定这个和数,无非就是要求出构成一等差级数的诸项之和,用卡佛来利的话来说,就是

$$\frac{\text{三角形的面积}}{\text{同底同高的矩形面积}} = \frac{0+1+2+3+\cdots+n}{n+n+n+n+\cdots+n}$$

这个比值已知是1:2。同样,如果我们想要比较一个圆锥体的体积与一个同底同高的圆柱体体积,那只要求得无数个圆(从顶点处一点增大到底边处的最大圆)的面积之和,与同等数量的、其中每个都等于构成该圆柱体的圆中最大者的圆的面积之和的比,亦即我们要求出下列的比值:

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2}{n^2+n^2+n^2+n^2+n^2+\cdots+n^2}$$

当 n 逐渐增大时,这个比值已知趋近于1:3。卡佛来利用这些方法确立了这样一事实:比值

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^3+n^3+n^3+n^3+\cdots+n^3}$$

在同样情况下趋近于1:4。他大胆地把这些结果加以推广,得出结论说,只要 m 是一正整数,则比值

$$\frac{0^m+1^m+2^m+3^m+\cdots+n^m}{n^m+n^m+n^m+n^m+\cdots+n^m}$$

当 n 变为无限大时将趋近于1:($m+1$)。可以看出,这个结果相当于用积分记号写成的下列结果:

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$$

尽管卡佛来利用这种方法得出了正确结果,但它不是没有缺点的,甚至在那些不很严谨的日子里,也有人以一定程度的怀疑眼光来看待它。虽然如此,这本论著的发表还是鼓舞了许多数学家,特别是法国数学家,使他们能够用比较容忍的态度去对待无穷小量的概念,结果问题便开始以更抽象的方式来研究并且变得更普遍了。费尔马(1601~1665)似乎已经发现了几种求积的方法,这主要是从他给梅尔生的一封信中看出的。在这封信中,他曾指出怎样运用若干抛物线求

积的方法。罗伯佛尔(1600~1675)和后来的帕斯卡都曾试图摆脱卡佛来利方法中的那些明显缺点,他们认为一条线不是由点所构成,而是由无数根短线构成;一个面是由无数个狭窄的矩形构成,一个立体则是由无数个薄薄的立体构成。遵循着这一思想线索,罗伯佛尔和他之后的托里切利(1608~1647)都证明了摆线的面积为其母圆面积的三倍,后者可能是独立于前者完成这项工作的。罗伯佛尔还考虑了一些曲线,其横坐标是纵坐标的三次、四次或五次方。他证明了这些曲线的面积分别是其外接四边形面积的 $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ 和 $\frac{5}{6}$ 。它们成级数的规律是明显的。但也有这样的情况:横坐标的任意指数与纵坐标的任意指数成比例。罗伯佛尔在1654年写给托里切利的一封信中证明了,在横坐标的平方与纵坐标的立方成比例的情况下其比值应为 $\frac{3}{5}$ 。

下一步进展来自英国。约翰·沃利斯在其 *Arithmetica Infinitorum* (《无穷算术》,1656)一书中采用了无穷小量的学说,他认为如果能证明卡佛来利的结果在 n 不是整数时仍然有效,他就能进一步解决那古老的化圆为方问题。在考虑抛物线时,他知道当构成此抛物线的诸线(纵坐标)之距离成算术级数增加时,例如按 $1, 2, 3, \dots$ 比例而增加,那么,这些线本身就按这些数的平方根比例而增加,即按 $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$ 而增加。此外,自从阿基米得以来人们就已知道抛物线弓形的面积是其外接四边形面积的三分之二,因此这样两个陈述相当于下列关系:

$$\frac{\sqrt{0} + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n} + \sqrt{n} + \sqrt{n} + \dots + \sqrt{n}}$$

结果等于 $\frac{2}{3}$ 或 $1:(1 + \frac{1}{2})$ 。另一方面,沃利斯已经猜到 \sqrt{n} 能写成 $n^{\frac{1}{2}}$,

因此他得出结论说,卡佛来利的结果当 n 等于 $\frac{1}{2}$ 时仍然有效。从这点

他论证了,如果用 $\sqrt[3]{x}$ 或 $x^{\frac{1}{3}}$ 代替 \sqrt{x} ,则所求比值应为 $1:(1 + \frac{1}{3})$,或 $3:4$ 。

他以罕有的胆量推广了这些结果,发表了下列定理:

若有无穷系列的数,从0开始按任意指数(不论是简单数或合成数)不断增加,那么,这些数之和与各数均等于其最大数的同样多个数之和的比值为 $1:(1 + \text{该指数})$ 。换言之,这表明卡佛来利所确立的关系当 n 为分数时仍然有效。(《无穷算术》,命题 LXIV)

无穷小量的研究鼓舞了别的数学家去钻研许多同类性质的问题。

在这些问题中出现了几个关于微分法的特点。费尔马由于考虑了无穷小量而得出了确定函数的极大值和极小值的方法,这种方法实质上就相当于令函数的导数等于零。费尔马还发现了一种在曲线的任一点上作切线的方法,在这方面仿效他的是牛顿在剑桥的导师伊索克·巴罗。由于他们的工作,微积分的发明已经刻不容缓了,但在走上最后一步之前,还要进一步把基础打好。费尔马和笛卡儿所发明的解析几何加速了微积分的成熟,他们的工作使整个古典几何领域处于代数学家的支配之下。

有人说,现代数学始于解析几何和微积分两个发明,这样说不是没有道理的。上述两项发明都各有其先声。从这个世纪开始,新的几何方法一直向微积分方向前进,没有发生过偏差。解析几何也可考查出它的古代起源。有不少的中古作家也曾徘徊于解析几何观念的周围,但其主要原理的发表实际上是17世纪初期的产物。

以坐标系为参考来确定点的位置,这对希腊人甚至埃及人是早已熟悉了的,但这还不是坐标几何。尼可拉斯·鄂雷森(1323~1382)似乎曾迈出坐标系发展中的一步。1486年他在帕多瓦发表了 *Tractatus de Latitudinibus Formarum* (《论形状的大小》)一书,但在鄂雷森的著作中,找不到什么有关代数与几何之间本质联系的证据,纵坐标没有按照任何预定的规律终止。关于这门学科发展中的一些最初的真正步骤,必须转向佩亚尔·费尔马的 *Ad Locs Planos et Solidos Isagoge* (《空心与实心概论》)一书。这本著作可能是在1629年左右编写的,但直到半世纪以后才发表出来。

费尔马曾力图把阿普罗尼亚斯关于轨迹的某些已经失传的证明补充起来,他在这些努力中应用了坐标系,并据以研究了若干曲线。从他与罗伯佛尔和帕斯卡的通信中,可以非常清楚地看出他早在笛卡儿的《几何学》一书发表前几年就已经有了某些最辉煌的发现了,例如作切线的方法、极大值与极小值的确定。在他所发表的著作中,还有一些无可争辩的证据说明他已发现了用代数方程表示曲线性质的方法。事实上,只要读一读 *Ad Locs Planos et Solidos Isagoge* 一书的开头几页,就可以明了他对解析几何基本原理掌握到怎样清楚的程度,这几页的内容如下:

“每当我们在最后的方程中求出两个未知数时,我们就有一条轨迹,其中之一的顶端描出一直线或曲线。直线是简单唯一的,曲线的

数目则是无限的,包括圆、抛物线、椭圆等。”

“每当构成轨迹的未知数的顶端所描出的是直线或圆时,这轨迹就称为平面轨迹;当它所描出的是抛物线、双曲线或椭圆时,它就称为立体轨迹;如果描出其他曲线,则称为线性轨迹。若令两个未知量构成一给定的角,通常假定它为直角,并且未知量之一的位置和顶端是确定的,则此方程是很容易想像的。如果这两个未知量的幂次都不超过二次,则由后面所述便能明白,其轨迹是平面轨迹或立体轨迹。”接着费尔马又进一步确定了各种轨迹的方程,以现代的记号写起来就是:

1. 过原点的直线方程: $\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$

2. 任意直线的方程: $\frac{b}{d} = \frac{a-x}{y}$

3. 圆的方程: $a^2 - x^2 = y^2$

4. 椭圆方程: $a^2 - x^2 = ky^2$

5. 双曲线方程: $a^2 + x^2 = ky^2$

6. 双曲线方程: $xy = a$

7. 抛物线方程: $x^2 = ay$

然而,这并不意味着笛卡儿在编写《几何学》一书时曾利用了费尔马的结果。没有什么证据说明他可能知道费尔马在这方面的研究成果,事实上,笛卡儿的处理方式表示他所走的是一条完全独立的路线。因为他不仅使用了使人容易理解的记法,使用了比任何其他人(包括费尔马在内)优越无比的技巧,而且开拓了一些崭新的空间。他曾指出,如果两条曲线以相同的轴和同一个坐标系为参考,则其交点由它们的方程之解来确定。“从来都没有谁作过任何尝试,企图把不同次数的几条曲线同时表示在一个坐标系中,并且这个坐标系至少对其中一条曲线具有特殊意义,甚至连费尔马也没有尝试过。笛卡儿所系统完成的恰恰是这件事。”^①此外,只要一条曲线可以找到一个方程适合于它,笛卡儿就毫不迟疑地把它考虑进来。这样,以前一向为几何学家所避免的许多曲线,就有了和比较常见的曲线相同的地位了。

我们要简短地考虑一下笛卡儿真正革新的范围及其重要性。单纯地使用坐标系肯定不是一项革新。再者,如前所述,用我们今天所

^① Karl Fink, *Brief History of Mathematics*. Translator, Beman and Smith, Chicago, 1875.

称的笛卡儿坐标系来系统地研究直线、圆或二次曲线的方程乃是佩亚尔·费尔马的工作。笛卡儿所真正取得的进展是在于这样一个事实:他证明了几何问题可以归结为代数形式的问题,因此在求解时可以运用代数的全部方法。同时由于代数的语言远较几何语言富有启发性,所以在问题改变形式之后,只要进行一些代数变换,就可以发现许多出乎预料的性质。此外,由于笛卡儿采用代数语言来表示几何性质,这就使他提出了许多定理的简单证明,而这些定理要用传统的几何方法来处理则是很困难的。

这里,在分析《几何学》一书之前提一下我们在书中看到的记法上的改进是适宜的。主要的改进是笛卡儿引用印度—阿拉伯数字来书写指数的做法,这一直沿用到今天。但是出于某种原因,他几乎是自始至终地把 a^2 写成 aa 。他从来没有用过一般的指数 x^n ,他也没有把他的记法推广到包括分数指数与负指数,一直等到约翰·沃利斯的《无穷算术》(1656)一书的出版,人们才初次看到非正整数指数的明确表示方法。笛卡儿仿效哈里欧那样,全部是使用小写字母,此外还有一项革新,就是用字母表中开头几个字母来表示已知数,用末尾几个字母表示未知数。这是根据韦达而作出的改进,韦达曾用辅音字母来表示已知数,用元音字母表示未知数。笛卡儿丢开了韦达关于维数的限制,认为算术上的二次方 a^2 既能度量实际的平方,也能度量长度,算术上的一次方既能度量长度也能度量平方。这是一个大解放。至于等号,笛卡儿是用符号“ ∞ ”,这或许是 *aequalis*(相等)一词头两个字母的转化。书中时常可以见到符号“ $=$ ”,他在通信中一般是用两条直平行线。他用带有括线的根号来表示一个数的平方根,和今日所用的根号一样,至于立方根,则在根号之后插进一个字母 C,例如

$$\sqrt{C \cdot a^3 - b^3 + abb} \text{ 即是 } \sqrt[3]{a^3 - b^3 + ab^2}$$

《几何学》一书分为三部分,前两部分专论解析几何,第三部分专论当时流行的代数分析。这本书一开始就提出了解析几何的主要原理。笛卡儿说:“每个几何问题都可以归结为这样几句话:为了构成这个问题,所要知道的无非是关于若干直线的长度知识,并且在确定这些长度时,只需要四五步运算。正如一个算术运算可以包括加减乘除和开方(开方也可以看成是除法的一种变化形式)一样,几何学也是如此。如果我们想要确定若干直线的长度,那只要加上或减去别的直线,而在两条线相乘的情况下,只要求出单位线与两条已知线的第四

比例项,依此类推。”笛卡儿是用字母来表示他在作图中所用线段的大小的。韦达曾用过这个方法,但笛卡儿作了一个大大的改进,即认为它们与物理量完全没有关系, a^2, b^3 或类似的表示,一般只是指简单的线段而已。例如,如果字母 b 和 c 表示两个不同长度,则其乘积 bc 不应理解为面积,而应理解为满足比例关系 $bc:b = c:1$ 的另一长度。同样, $\frac{b}{c}$ 乃是一条满足比例关系 $\frac{b}{c}:1 = b:c$ 的线段。笛卡儿用这种方法摆脱了以前一些作家关于三次以上的幂所感到的麻烦。三次以上的幂无非是一些连续相乘的项,其第一项是单位数。

《几何学》一书是试图解决派帕斯所提问题的结果。“在一平面上给定三条、四条或更多条位置一定的直线,首先要求找到一点的位置,从该点到每条给定的直线可以作许多其他的直线,与之交成已知角,使得从该点所作的这些线中,有两条线所围的矩形与第三条线上的正方形成给定比例,如果只有三条线的话。或与另外两条线所围之矩形成给定比例,如果有四条线的话。要是五条线,那么这样作出的三条线的乘积便与其他两条线和另一条线的乘积成给定比例,依此类推。然后,由于满足这个条件的点总是有无限多个,所以再要求找到并作出一条线,使所有这些点都位于该线上”,亦即要求描出轨迹。笛卡儿在研究这个问题时,曾说明怎样用两条未知直线 x 和 y 把所有直线的长度表示出来,于是问题的条件就使他能把这些合并而成为一个方程的形式,从这方程中取足够多的 x 和 y 的相应数值,就能描出所求点的轨迹。

例如令 AB, AD, EF, GH (图 13) 是几条直线,其位置给定,但其长度未给定。笛卡儿说,让我们假定

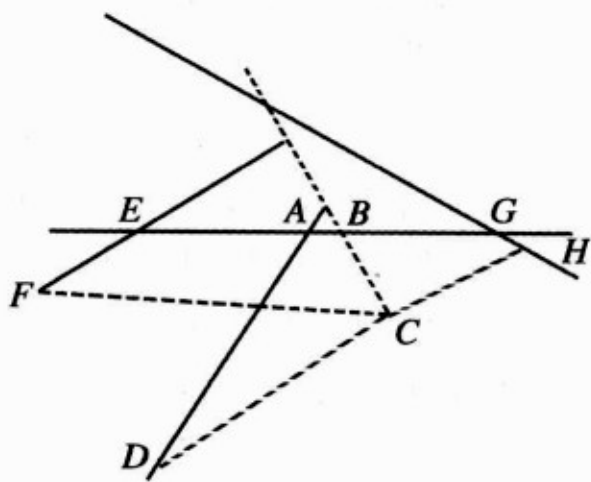


图 13

问题的解已经得到了,并假定 C 位于所求的轨迹上。给定的直线之一 AB 和所求的一条直线 CB ,可取为与其他直线有关的主线。用现代的话来说, AB 是以 A 为原点的一个坐标轴。假定 AB 和 CB 的长度分别为 x 和 y ,其他直线 CD, CF 和 CH 的长度可由 x 与 y 确定。因此若 $CB \cdot CF = CD \cdot CH$,我们就可

得到一个方程,从这方程可以由未知数之一的给定数值求出其他未知数的相应数值,因此可以求出通过 C 点的曲线上其他点的位置。笛卡儿深入研究了这种曲线的性质,并指出在三条或四条直线的情况下,这种曲线或者是圆或者是圆锥曲线。

笛卡儿在这本著作中还提出了一种作一曲线之切线的方法,这一问题曾使当时某些最有才能的几何学家大伤脑筋。这将在后面一章加以叙述。他还描述了各种类型的后来以他的名字命名的卵形线,并且深入研究了它们的性质,其目的是要说明它们可以用来制造各种类型的望远镜和显微镜的透镜。

《几何学》一书的第三卷评论了作者所看到的代数学状况,对方程的研究也作了某些有价值的贡献。由于笛卡儿引用了比以前更精巧的记法,并且比较自由地运用了负根(假根),这使他作出了某些不朽的改进。但是在他的这本著作中创造性的东西不多,许多东西都是步他人的后尘,特别是韦达。这一部分载有笛卡儿的“符号规则”:在任一方程中,有多少次符号改变,就有多少个真根(正根),有多少次两个同号相连,就有多少个假根。(Il y en peut avoir autant de vrayes, que les signes + & - sy trouvent de fois estre changés: & autant de fausses qu'il s'y trouve de fois deux signes +, ou deux signes - qui s'entresuivent)。有证据说明,早期作者特别是卡尔丹已经知道这个规则,但不完全。^① 应当指出,笛卡儿只是给方程正负根的数目定了一个界限,而没有指出具体方程中正负根的数目有多少。看来,他知道他的规则在方程含有虚根的情况下失效。事实的确如此。不幸的是,他没有把这件事比较清楚地说出来,因为与他同时代的许多人,尤其是罗伯佛尔与沃利斯,曾就他发表的这个规则提出了批评。

尽管如此,该书这一部分的内容的确也有一些新东西。例如,把方程的实根与虚根比较明确地划分开来就是新东西。此外还可看到一个定理:多项式 $f(x)$ 的零点个数至多与它的次数相同,并且当且仅当 a 是多项式的根时,多项式才可被 $(x - a)$ 除尽。书中求出了一些方程,它们的根与给定方程的根保持各种不同的关系。 x^{n-1} 的系数总可化为零。所有的三次方程与四次方程都可用代数方法化为最简单的形式。反之,相应的几何学问题一定能以完全相同的方法化为最简

^① Cantor, II, 496, 725 页。

单形式的问题。三等分角与立方倍积等古典问题的解决有赖于三次方程的解。

然而,笛卡儿最有价值的工作,乃是他苦心经营的坐标几何方法。同时,《几何学》一书的发表开辟了一个广阔园地,特别是在圆锥曲线的研究方面。孟尼区玛斯和比其稍后的阿普罗尼亚斯,都曾深入研究过由锥面的平面截口得到的曲线的性质,但是许多世纪以来,人们研究这些曲线的兴趣一直不大,他们的继承者对这一科目的发展只取得了极为微小的进展,而笛卡儿的探索则大大推动了这些曲线的研究工作。他的方法可以把任何疑难命题的证明或反证明归结为一种代数技巧,而这种技巧是不需要多大才智的。尤其是,单纯的几何语言这样被改成代数学语言之后,就变得大有启发性,事实上往往能指出一些无可置疑的几何关系,这些关系乃是希腊人拿出他们的全部技巧都决不能发现的。最后,我们将看到,笛卡儿的方法对于牛顿到达发明微积分的最后步骤有着无可估量的用处。

盖拉德·德扎尔格(1593 ~ 1662)的题为 *Brouillon Projet d'une Atteinte aux Evénemens des Rencontres d'un Cone avec un Plan* (《关于锥面与平面相截的一种尝试的建议草案》,1639)一书的出版,在几何学中开辟了一个崭新的园地,它使数学家注意到了一门全新的科目,即射影几何学。德扎尔格在这本著作中没有采用研究圆锥曲线的传统方法,他的几何学乃是射影几何。他有着当时少有的概括才能,并且坚持认为所有的圆锥曲线都能从同一曲线发展而来,随着某些元素的变化,它可以是抛物线、椭圆或双曲线。由于他引用了无穷远点与无穷远线之类的概念,所以他能从圆的性质了解到椭圆与其他圆锥曲线的性质。直线变成一个具有无限长半径的圆的一部分;平行直线在无穷远处相交;焦点相合的椭圆退化为圆;焦点之一在无穷远的椭圆是一抛物线。这种研究圆锥曲线的方法为几何学家提供了关于圆锥曲线性质的更简单更巧妙的论证,很可能年轻的帕斯卡就是用这种方法来考虑圆锥曲线的。德扎尔格确立了许多漂亮的定理,特别是德扎尔格定理。这个定理说,如果把两个三角形相应顶点连接起来的三条直线相交于一点,那么三对相应边的交点在同一直线上。

德扎尔格的著作虽然是重要的,但笛卡儿的《几何学》几乎同时的发表而使之稍显逊色。只有少数几何学家给予较多的注意,而菲利普·狄·拉·希尔(1640 ~ 1718)是一个突出的例外。由于用了德扎尔格

的方法,他证明了阿普罗尼亚斯的全部定理都可用射影方法来确立。但甚至连这点也未能使数学家相信这个新方法应用领域的广阔,因而这门学科迟迟没有发展起来。19世纪,它在诚赛莱、蒙日和卡诺的手里突然有了飞速的发展。

其他数学部门 在我们所考察的这个世纪,取得最蔚为壮观的进展虽然是在几何学方面,但人们对数学其他方面的兴趣从来也没有衰落下去。代数学一直在大步前进。记数法不断地得到改进,方程的解法仍然吸引着当时数学家的注意,要注意,笛卡儿《几何学》一书的第三卷整个都是用来研究代数的这一方面的。哈里欧、佛罗利蒙·狄·博恩和约翰·赫德更进一步地推动了关于方程性质的研究,赫德发现了一种巧妙的方法来确定方程是否有等根,以及在有等根存在时如何求出它们。三角学进一步改进了,乌特勒的《三角学》一书(1657)载有今日所用的三角简写方式。大约在这时,无穷级数已开始受到越来越多的注意,特别是在沃利斯、墨卡托(1640~1687)、詹姆斯·格雷果里(1638~1675)和白隆葛爵士(1620~1684)等人手里。就在这个世纪的上半叶,出现了一项崭新的创造,那就是关于概率的研究。并肩而来的是人们对于数论这个重要理论重新迸发了兴趣。

对概率论进行最早的科学探索,应该归功于费尔马和帕斯卡二人。大家记得,卡尔丹曾对机会对策中产生的一些问题感到过兴趣,但首先试图把这些问题归结为一种法则的,则是费尔马和帕斯卡。

鼓舞这两个人认真对待这项研究的问题可以陈述如下:两个赌徒A和B坐下来玩一场碰运气的赌博,先得 n 点的为获胜者。他们的技术水平相当。当A获得 x 点,B获得 y 点时,赌博结束了。底码应该按怎样的比例摊派呢?这个后来称为“点的问题”其实是一个很古老的问题,当一个轻率的赌徒希凡利·狄·米尔向帕斯卡提出这个问题,而帕斯卡又立刻把它转给费尔马时,它就开始引起人们的重视了。他们两人都得到了正确的答案,但所用的方法不同。关于概率的研究就是这样开始的,这一研究经过了漫长的历史,在18世纪与19世纪中,它吸引了许多著名数学家的注意力,直到今天仍是如此。^①

人们对于数论之重新感到兴趣,要归功于费尔马。虽然我们已经

^① 参看 Todhunter, *History of the Mathematical Theory of Probability*, London, 1875。

看到,费尔马对许多数学部门都有突出的贡献,但最能显示他的才能的,乃是在数论方面。可以说,现代算术是从费尔马真正开始的,他在希腊人使用过的意义上使用了“算术”这个术语,即专指数的性质以区别于计算。希腊人也研究过数的性质,我们曾看到,在欧几里得、尼科马卡斯、地昂、狄奥芬塔斯等人的著作中都出现过一些孤立的定理。他们研究过各种不同类型的数——完全数、亏数、过剩数与亲和数。完全数曾被定义为等于其全部因数之和的数。一个数根据其所有因数之和小于或大于该数而被称为亏数或过剩数。例如6(其因数为3,2,1)是完全数,8(其因数为4,2,1)是亏数,12(其因数为6,4,3,2,1)是过剩数。如果有两个数,其中每个数等于另一数所有的因数之和,则这两个数称为亲和数。例如220与284是亲和数,因为220的因数是1,2,4,5,10,11,20,22,44,55与110,这些数加起来是284,而284的因数是1,2,4,71,142,这些数之和是220。

如我们已经看到的,这门学科也曾强烈地吸引过印度人,但是直到费尔马由于仔细读了狄奥芬塔斯著作的译本(该译本是1621年梅日利先生、克劳特·葛斯派·勃切所译)而把注意力转到这方面的研究之前,他们始终不曾有过什么进一步的尝试。费尔马所发现的一些定理散见于他写给梅尔生的信件中。他在1640年6月所写的一封信中提出了三个定理,并且宣称说,这三个定理是他关于数的性质的研究基础。这三个定理是:

1. 若 n 是合成数,则 $2^n - 1$ 是合成数。
2. 若 n 是素数,则 $2^n - 2$ 可被 $2n$ 除尽。
3. 若 n 是素数,则除了 $2kn + 1$ 这种形式的数之外, $2^n - 1$ 不能被其他素数除尽。例如 $2^{11} - 1 = 2047$, 其因数为23与89,或 $2 \times 11 + 1$ 与 $8 \times 11 + 1$ 。^①

然而,他最著名的定理却出现在上述狄奥芬塔斯译本的页旁注解中。证明提出得很少,补充这些证明是下一世纪许多杰出数学家所专心从事的工作。下面是选出的一些例子:

1. 每个形如 $4n + 1$ 的素数是两个平方数之和,而且只有一种方式构成这个和。 $4n - 1$ 不可能是两个平方数之和。1749年欧勒给这个定理提供了证明。

^① Dickson, *History of the Theory of Numbers*, 1, 12 页。

2. 若 n 是任意整数, p 是任意素数, 则 $n^p - n$ 可以被 p 除尽。这个定理的首次发表出来的证明也是欧勒提供的(1738), 然而, 现在看来莱布尼兹大约在 1683 年发现过一个证明, 但没有发表。

3. 方程 $x^2 + 2 = y^3$ 可为一对且仅可为一对整数所满足, 即 $x = 5$, $y = 3$ 。

4. 假如 n 是一大于 2 的整数, 方程 $x^n + y^n = z^n$ 没有整数解。在 n 取特定值的情况下曾有过许多证明, 至于普遍的证明却至今不曾出现。费尔马声称他已经有了“真正奇妙的证明”, 但假如有过的话, 那也是没有发表出来的。

费尔马还宣称 $2^{2^n} + 1$ 是素数, 但他承认他不能给予证明。事实上, 这句话是不正确的: $2^{2^5} + 1$ 或 $2^{32} + 1$ (即 4 294 967 297) 就等于 $641 \times 6\,700\,417$, 此外还有其他例外。

在费尔马之后, 关于数论的研究, 许多年内都没有为人所注意。新的几何方法引起了大多数数学家的重视, 但在下个世纪才可以看到复兴的气象。K.F. 高斯(1777 ~ 1855)真正占领了这门学科。高斯的 *Disquisitiones Arithmeticae* (《算术研究》)一书(1801)标志着彻底研究这门学科的开始。

前面屡次提到的卜莱斯·帕斯卡是依丁·帕斯卡的儿子, 他是一个有着非凡才能的人。童年时, 他就显示出惊人的早慧, 据说还不到 13 岁就已精通欧几里得的《几何原本》。到 16 岁时, 他已编著过 *Essai pour les Coniques* (《论圆锥曲线》, 1640) 一书, 这是一本大有价值的书, 连笛卡儿都难以相信它是这样年轻的人独立写成的作品。帕斯卡采用了射影法, 他为我们提出了几何学上一个最精巧的定理, 那就是: 若一圆锥曲线外接一个六边形, 则其三对对边的交点处在同一直线上。

尽管帕斯卡从 1640 年到 1646 年的健康状况一直不佳, 但他仍然坚持数学研究, 从不间断。18 岁时, 他发明了第一台计算机。后来他在 1646 年放弃了数学, 埋头于宗教冥思, 并且参加了 Les Messieurs de Port - Royal。12 年后, 他又转而钻研数学, 专心从事于摆线的研究, 摆线就是圆在沿平面滚动时圆周上一点所描出的曲线。这种曲线由于其具有特别优美的“形象”, 从它大约在 16 世纪初第一次出现起就一直为几何学家所喜爱。研究这种曲线的人还有法国的罗伯佛尔和英国的雷恩与沃利斯。帕斯卡在极短的时间里发现了摆线的许多性质, 这些性质在今天要借助微积分才能发现。他用 E. 狄通维尔这一笔名

向欧洲的所有几何学家提出了挑战(1658),邀请他们来解某些有关这种曲线的问题,其中包括由该曲线绕不同轴旋转而成的立体重心的确定问题,这些问题是如此之困难,以致只有两位数学家敢于试试。他们是约翰·沃利斯与耶稣·拉鲁埃尔。两人无一被评为合格。

盖尔斯·潘尚·狄·罗伯佛尔曾研究过许多平面曲线,其中包括摆线。他声称远在他的同时代人注意到这种曲线之前,他就已发现了它的许多性质。他还声称他曾预见到卡佛来利的方法,但是他的研究报告 *Traité des Indivisibles* (《极微分割论》)直到很久之后才发表,因此无法肯定他在多大程度上是这方面的原始研究者。

1642年,牛顿诞生了。当他还是剑桥的一个大学肄业生时,就已显示出惊人的才能。在20多年的时间里,他改变了数学的整个面貌。在我们考虑他那些闻名于世的著作之前,先要转到一门有关的学科,这就是力学。这门学科经过漫长的灰暗时期以后,终于开始引起数学家们的注意了。



第八章 力学的兴起

我们已经看到,除了短暂的间断之外,在公元元年以来的前 16 个世纪,数学一直是稳步前进的。然而力学总是落在后面。虽然阿基米得指出过正确的方向,但是 1800 年来取得的进展很小,甚至在中世纪,关于静力学和动力学基本问题的阐明也只吸引了极少数科学家的注意。久萨的尼可拉斯、卡尔丹、塔尔塔格里亚都曾经把注意力转到过力学方面,但在他们的著作中很少有什么独创的东西,即使他们偶尔看到了真理,他们的思考也很少有不朽的价值,而且那也不是常有的事。除了一些能够归结为杠杆原理的有关物体平衡的问题之外,简直看不到什么别的东西了。动力学中甚至流传过很多的谬误,很少有人具有足够的勇气去怀疑亚里士多德的权威,更不用说否定了。

然而,大约到 16 世纪末叶,可以清楚地看出人们对这门学科重新有了兴趣。正像这个时期前后的商业刺激了数学的发展一样,力学这门科学也由于战争和航海的需要而受到有力的推动。随着工程技术的发展,人们对力学更加关心起来了,由于采用了机器,力学原理的理论研究真正开始了,而这是与它的实际应用不同的。

以后的 100 年给这门学科奠定了牢固的基础。在伽利略的著作中开始出现这样的观念:力学要取得任何进展就必须以数学为基础。这个观念又为沃利斯及其继承者所发展。人们终于开始认识到,有必要清楚地定义力和动量这类基本观念。妨碍数学家去了解产生运动和保持运动这两者之间区别的那些思想混乱终于消除了,现在人们已经了解,力之所以需要不是为了保持运动,而是为了改变运动。理论上和实验上不仅建立了杠杆的平衡定律,而且建立了机械功的平衡定律。在流体静力学方面,从阿基米得以来成就一直很小,甚至很少有

人进行过尝试。16 世纪下半叶人们在这方面重新有了兴趣。人们研究了流体压强的问题,确立了流体压强与深度之间的关系。冯·哥利克对空气唧筒的发明以及胡克和波埃耳对其所作的改进,导致大气压强方面的重要研究,结果使得大自然厌弃真空的学说彻底破产,而这个学说在此以前却从未有人认真加以诘难过。把这些原理完整地构思出来,并且把它们归并成定律——这些就是我们现在所要面对的那个时期的一些主要贡献。

为了给这门学科提供一个稳固基础而进行的最初尝试,在吉多·巴多·德·孟特(1546~1607)的著作中可以看出。他是第一个摆脱了阿基米得的人,在他的 *Mechanicorum Liber* (《论力学》,1577)一书中有一些关于杠杆原理的有趣推测。他宣布了一条定律说力和负荷的大小与它们在同一时间内所移动的距离成反比。但是,他不懂得斜面原理,所以他依照卡尔丹,假定在平面上支持一个物体所需的力与此平面的倾角成正比。更不朽的是杰凡奈·拜惕司他·贝奈得梯(1530~1590)的研究。他表现出对斜面原理和弯曲杠杆原理有了清楚的理解,在他的著作中预见到关于力矩的重要原理。然而,他对科学的主要贡献却是在对亚里士多德学说的考证方面,他否定了其中许多原理。在他的著作中可以看到有第一运动定律的影子,即一切运动都是自行均匀的直线运动。他已经认识到绕着圆周运动的物体有沿直线离开的趋势,这对当时流行的观念说来是很大的进步;他研究过落体运动,并且认识到这种运动是加速的;他解释了这个加速度是由于地心引力所施冲量的总和产生的;他把抛射体的运动归因于 *virtus impressa* (感受的作用),但他未能正确地描出轨迹。

最显著的进展来自斯特文。他的杰出贡献是在静力学方面,力的三角形关系这个重要原理的发表应当归功于他。但他可能是根据实验来证明他的结果的,他的著作表明,他曾考虑过绕三角形 ABC 并挂有重量的一根链条的平衡,由此先验地得到了同样的结果。

他说,设有一三角形 ABC ,其平面是垂直的,底是水平的。 AB 边两倍于 BC 边。在 AB 上置一重量 D , BC 上置一相等的重量 E ,这两块重量由一根经过三角形最高点的绳子连结起来。虽然两块重量是相等的,但 E 将开始下降,因为它有较大的 *puissance ou pouvoir* (动力或能)。

为了说明这点,让我们假定有一根首尾相连的绳子,上面载有 14 个等距离的同样重的小球。整个系统挂在一个三角形 ABC 上,使得

P, Q, R, D 四个小球静止在 AB 面上, E, F 两个小球静止在 BC 面上。其余八个小球 G, H, I, K, L, M, N, O 则挂在绳子的弯曲部分上, 如图所示(见 126 页图)。这个系统一定保持静止状态, 小球从一边向另一边的任何运动只会使初始状态再现, 因此没有什么理由说, 运动一旦开始就会继续下去。这样说会导致永恒运动, 而这是斯特文斥之为荒唐的事情。还有, 如果在同一三角形上有一小球 D 静止于 AB 上, 再用一根绳子通过滑钉 F 把它与一个重量只有一半的小球 E 连接起来, 使得这个系统能自由移动, 则它仍会保持静止不动。如果 BC 变成垂直线, 情况仍是如此, 只要 BC 仍然是 AB 的一半。斯特文用这种方法确立了斜面的基本性质, 指出了一个小球静止在斜面上的物体重量与支持它所必需的力之间的正确关系。

斯特文还深入研究过许多流体静力学问题。他研究了流体对容器壁的压力, 证明了这一压力与容器的形状无关。他还解释了“流体静力学中的悖论”, 通常都认为这个解释是帕斯卡提出的。他也研究过浮体的平衡问题, 曾证明浮体的重心及其排出流体的重心位于同一垂线上。他在流体静力学方面的工作是由托里切利和帕斯卡继承下来的, 从托里切利那里又开始了下一个跃进。

由于伽利略的工作, 力学开始以科学的面貌出现。伽利略着重强调了定量的实验与数学推理之间的相互关系, 这向现代科学方法跨进了一大步。他发表了一个静力学上的普遍原理, 认为杠杆、斜面和螺旋这类机械中, 小力的效应可能与大力取得平衡, 只要当后者移动一段小距离时, 在同一时间内以同样比例使前者移过一段较大的距离。因此他超过了孟特。这还导致了关于虚速度的重要原理的公式的推出。

然而, 最值得我们纪念伽利略的, 乃是他动力学中的工作。在深入研究落体的运动时, 他从理论上和实验上证明了, 一切物体均以同样速度下落, 与其重量无关, 可以觉察到的任何细小变化都是由于遇到了空气阻力。在 *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche* (《数学的论文与证明》) 一书中, 他曾证明当物体以匀加速度运动时, 其速度与时间成正比, 而经过的距离与时间的平方成正比。由于缺乏精确测定微小时间间隔的方法, 他想到使重力“变弱”的办法, 即让一个小球从一个倾斜度可变的斜面上滚下来。他试图用这种方法来估计引力常数的值。他在 1583 年所进行的单摆实验中, 曾证明如果振荡的周期很小, 则与弧长无关。伽利略研究过抛射体运动, 并得到其轨迹是一抛物线

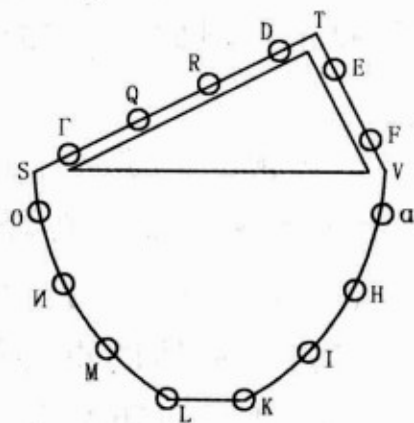
JUSQUES ICI ONT ESTE

declarees les proprieté des pesanteurs directes; & survent les proprieté & qualitez des obliques, desquelles le fondement general est compris au Theoreme suivant.

THEOREME XL PROPOSITION XIX.

Si un triangle, a son plan perpendiculaire à l'horizon, & sa base parallele à iceluy; & sur un chascun des deux autres costez, un poids spherique, de pesanteur egale: comme le costé dextre du triangle, au senestre; ainsi la puissance du poids senestre, à celle du poids dextre.

Le donné. Soit ABC un triangle ayant son plan perpendiculaire à l'horizon, & sa base AC parallele à iceluy horizon: & soit sur le costé AB (qui est double à BC) un poids en globe D, & sur BC un autre E, egaux en pesanteur & en grandeur.



Le requis. Il faut demonstrier que comme le costé AB à BC, ainsi la puissance ou pouvoir du poids E à celle de D.

Preparation. Soit accoustumé à l'entour du triangle un entour de 14 globes, egaux en pesanteur, en grandeur, & equidistans, comme D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, enfilez d'une ligne passant par leurs centres, ainsi qu'ils puissent tourner sur leurs susdits centres, & qu'il y puisse avoir 2 globes sur le costé BC, & 4 sur BA, alors comme ligne à ligne, ainsi le nombre des globes au nombre des globes: qu'aussi en S, T, V, soyent trois points fermes, dessus lesquels la ligne, ou le filer puisse couler, & que les deux parties au dessus du triangle soyent paralleles aux costez d'iceluy AB, BC; tellement que le tout puisse tourner librement & sans accrochement, sur lesdits costez AB, BC.

DEMONSTRATION.

Si le pouvoir des poids D, R, Q, P, n'estoit egal au pouvoir des deux globes E, F, l'un costé sera plus pesant

ce mouvement n'auroit aucune fin, ce qui est absurde. Et de mesme sera la demonstration de l'autre costé: La partie donc de l'entour D, R, Q, P, O, N, M, L, sera en equilibre avec la partie E, F, G, H, I, K; que si on oste des deux costez, les pesanteurs egales, & qui ont mesme disposition, comme font les 4 globes O, N, M, L, d'une part, & les 4, G, H, I, K, d'autre part; les 4 restans D, R, Q, P, seront & demeureront en equilibre avec les 2 E, F; parquoy E aura un pouvoir double au pouvoir de D; comme donc le costé BA à BC, au costé BC à, ainsi le pouvoir de E, au pouvoir de D.

Conclusion. Si un triangle donc a son plan, &c.

COROLLAIRE I.

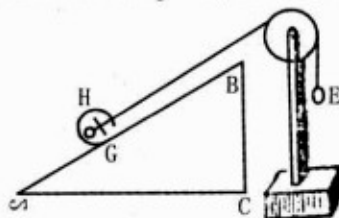
Soit ABC un triangle comme devant, & AB double à BC, & soit D un globe sur AB, double à E, qui est sur BC; en F soit un point ferme, par dessus lequel la ligne DFE puisse couler sans empeschement, ainsi que DF, FE soyent paralleles aux costez du triangle ABC, procedantes des centres des globes, il appert que D, E seront encor en equilibre, puis que cy-dessus P, Q, R, D, l'estoyent à E, F; parquoy comme AB à BC, ainsi le globe D au globe E.

COROLLAIRE II.

Soit maintenant l'un des costez du triangle, comme BC (qui est moitié de l'autre AB) perpendiculaire à AC, comme cy joignant; le globe D, qui est double à E, sera encor en equilibre avec E, car comme le costé AB à BC, ainsi le globe D au globe E.

COROLLAIRE III.

Soient derechef les mesmes posées, mais au lieu du point ferme F, soit adaptée une poulie comme icy, ainsi que DF demeure parallele à AB, & que E soit un



poids de quelle figure que ce puisse estre, egal en pesanteur à celuy de devant; iceluy avec D, seront encor en equilibre, parquoy comme AB à BC, ainsi D à E.

COROL-

《静力学》第一册, 448 页。(蒙皇家学会赐予转载)

的结果,由两个独立运动合成。伽利略的斜面理论引导他得到这样的结论:所有沿一铅直圆弧下落的物体降落的时间相同,只要这些弧的终点是圆的最低点。

伽利略的工作是力学全面革新的开始,无论就其内容还是他所用的方法来说都是如此。他的功绩不仅在于他建立了种种正确的原理,

而且在于他推翻了种种有害的学说。

在伽利略的门人中,许多人继承老师的研究对力学作出了重要贡献。其中最伟大的是伊凡吉利斯塔·托里切利。托里切利在其 *Opera Geometrica* (《几何运算》,1644)一书中曾把动力学的若干著名原理推广到流体上。他研究过水从容器壁上小洞流出的流量问题,还证明了许多可在现代教科书中看到的定理。他对晴雨计的研究使他能把“大自然厌弃真空”这个幽灵赶走,对玻璃管中能支持水银柱的现象提出了正确的解释。托里切利的晴雨计实验后来由帕斯卡继续下去,后者认为大气压强(亦即玻璃管中水银柱的高度)将随海拔高度的增加减小。帕斯卡曾于1648年8月在杜迈山顶上付诸试验,结果说明它是正确的。帕斯卡乃是第一个宣布流体中任何一点的压强在各个方向上都相同这个重要原理的人。

托里切利也研究过抛射体运动。和伽利略一样,他也了解抛射体的轨迹是一抛物线,而且似乎已经有了这样的观念:与水平线成 45° 角抛射可以得到最大射程。

在意大利还有其他人探索过有关落体运动的种种问题。杰凡奈·巴利诺就搞过这种研究,并于1626年在热内亚出版了 *De Motu Naturali Graviorum fluidorum et Solidorum* (《关于流体和固体重力的自然运动》)一书。书中有这样一句话:落体的速度与它已经走过的距离成正比。该书第二版(1646)中公布了一个正确的定律:相邻各秒中所走过的距离与奇数成正比。

与此同时,在数学发现上已经成为意大利的对手的法兰西也开始把注意力转向力学。在梅尔生的 *L' Harmonie Universelle* (《普遍的和谐》,1637)和罗伯佛尔的 *Essais Mécaniques* (《论力学》)中,都有关于力学和流体静力学中某些重要方面的论证,例如关于杆的振动、固体的阻力和水的流动等。梅尔生在其 *Cogitata Physico - Mathematica* (《物理—数学探索》,1644)一书中也有些贡献,但无法与前一本的贡献相比。

现在我们转到笛卡儿。为了完成“原子涡动论”的工作,笛卡儿不得不创建一个全新的动力学体系。其中只有两个物理概念,即空间(或广延性)和运动。他夸口说:“给我广延性和运动,我一定能把世界重建起来。”他把空间与物质等同起来,以致否定了真空的观念,拿走物质还剩下虚空的空间是不可能的,就像不可能移去山峰还剩下山谷一样。笛卡儿还提出了原子不存在的假定。物质和空间是一回事,它

们都有无限分割的可能。

笛卡儿主张,物质和运动这两个概念一开始就由上帝创造出来了,宇宙中任何东西都应当有其固定的数量,既不能增多也不能减少,这是神具有不变性的标志。因此,物理学所要考虑的唯一事实是运动从一点到另一点的联系,所以运动定律无非是关于运动从一点转移到另一点的定律。其中第一个定律以前曾被伽利略提到过,即处于静止或运动中的物体只要没有遇到任何能获得其运动的某些部分的东西,就会继续处于静止或运动。笛卡儿的第二定律是说,所有运动的物体将沿直线不断运动,要维持物体沿圆周运动,就必须对它不断施加外力。

笛卡儿的第三定律以及由之导出的七条“规则”,是以他所建立起来的原理为基础的。“如果一个运动物体遇到另一物体,且维持运动的力小于这另一物体阻挡其运动的力,那么,它就只改变运动方向而丝毫不损失其运动;但如果运动物体的力较大,它就会把力传给另一物体而损失其运动,把这部分运动给予另一物体。因此,一个坚硬物体撞到一个处于静止的较大物体上时,将被弹回来而丝毫不损失其运动。”

笛卡儿是有弱点的,其根源很容易看出。他企图靠神的不变性来解释宇宙机器的活动,这是一个致命伤,而且他无法明确定义他所用的种种术语,这也必然要使他陷入困境。即便连他的基本概念——运动,其定义也是含糊不清的:运动只是一个物体从那些与它接触的物体邻近转移到其他物体的邻近。因此它不与反方向的运动对立,而是与静止对立。事实上,运动和静止只是物体存在的两种不同的可能方式。笛卡儿完全不了解“运动之量”(动量)有其确定的方向,在碰撞中保持不变的乃是在同一方向上测出的运动之量。再者,宣称一个处于静止或运动中的物体具有某种“力”能够抗拒自身状态的任何变化——这也是很难使那些有数学头脑的人同意的,何况他还没有弄清楚力的含义是什么以及如何去测量它。因此在他的补充“规则”中偶然也能碰到真理,这是有点奇怪的。

笛卡儿认为,如果有二物体 B 和 C ,若 C 处于静止状态,并且大于但只略大于 B ,则无论 B 以多大速度趋向 C ,都决不会有使 C 运动的力量,而要被弹回来。甚至当克莱斯勒已经指出一个能自由运动的炮弹可能被手枪中的子弹所推动时,笛卡儿仍不信服。他对先天理性的信仰是如此强烈,以致完全看不到指导性实验的决定意义。正是这一点,损害了他的许多科学工作,把他引入一连串谬误的迷津,这在一位

具有如此才干的学者身上,倒是难得看到的。因此,如果像怀威耳所说,认为笛卡儿的《原理》对当时物理学的作用不大,这对笛卡儿讲来并没有什么不公正。这位杰出的历史学家说道:“如果拿笛卡儿与伽利略相比,可以说,在 17 世纪初期关于力学所能轻易获得的那些真理中,伽利略掌握了一位天才所可能掌握的那么多,而笛卡儿则掌握了一位天才起码要掌握的那么少。”^①

然而,“涡动说”却大受欢迎,以致在笛卡儿的同时代人和继承者当中,许多人都乐于接受它所依据的那些可疑原理。直到 1668 年英国皇家学会提请它的会员注意物体碰撞问题的时候,问题才开始引起重视。惠更斯、沃利斯和雷恩都撰写了论文,并且都得到了正确的解答。

1670 年约翰·沃利斯的 *Mechanica, sive Tractatus de Motu Geometricus* (《力学,或论几何运动》)一书的出版,是这门学科发展中的一个重要里程碑。沃利斯虽然对伽利略的著作表现出不小的轻视,但在坚持数学基础要同实验证明结合起来的问题上,他仍然遵循着这位伟大的意大利大师的指导。他认为,“要精确确定运动的物理规律,除了对它们应用数学度量和数学比例以外,别无其他办法”。沃利斯的确执行了这个主张,他的著作中充满了关于定律的说明,那都是符合正确的数学原理的。沃利斯还进一步了解到,如果所用的术语没有明确不变的意义,数学问题的讨论就没有什么用处,因此他坚决丢开了当时流行的意义模糊的术语。

De Motu 是在牛顿的《原理》之前发表的一本关于力学的最详尽的论著。该书第一篇中对惯性定律的说明如下:“不动的物质可以说是静止的,也可以说是运动的,无论哪种说法都是一样,也就像它对任何运动方向说来没有什么差别一样。因此它将保持它原来的静止或运动状态,沿同一方向并以同一速度进行,直到某个主动的原因使它发生变化。”仔细读读这本书就可以清楚地看出,沃利斯对运动定律的说明和我们今天了解的是多么相近。他已经了解力与动量之间的关系。他在命题 17~21 中宣称道,诸力的力矩与力和它们的作用时间成正比,如果作用时间相等或者成反比,则所得力矩也相等。在下一章(*De Gravium Descensus*,《论重力的下垂》)中他宣称力所产生的效果与它们的大小成正比。

^① Whewell, *Philosophy of the Inductive Sciences*, II, 1847, 288 页。

这本论著第三章的内容是关于力学机械的广泛说明。该章自由应用了力矩 *ponderatic* (或力与距离的乘积) 原理。事实上, 他的说明是如此严密, 以至拉格朗日在谈到它时都满口赞扬。这也致使沃利斯去深入研究确定不同物体重心的方法, 其中包括圆形物体的重心。他在这方面远远超过了他的前辈, 因为他充分利用了他已在《无穷算术》一书中苦心确定的极微分割原理, 他用这种方法得出了我们今天用积分法得到的结果。

沃利斯著作的发表激起了人们对力学的兴趣。从此以后, 大家都热衷于这门学科的研究, 一二百年里很少有哪位数学家没有在这方面发挥过才能。前面我们曾提到英国皇家学会对碰撞问题很有兴趣, 其后不久就发表了惠更斯的不朽著作 *Horologium Oscillatorium* (《摆动的时钟》, 1673)。惠更斯对纯数学已经有过重要贡献, 特别是在求积问题的研究上, 但他之所以值得我们纪念, 也许是因为他在发明度量时间的精确方法上所显示的技巧。他在这方面的研究使他发明了摆钟, 这个工具的重要性对天文学家说来几乎不亚于望远镜。这些都在上述论著中作了详细介绍。这本著作还详尽地讨论了摆长与其振动周期之间的关系。他也研究过复摆, 曾证明振动中心与悬点可以交换位置, 并指出怎样利用这一点来确定引力常数。他的单摆实验曾引导他去研究圆锥摆, 并且证明了, 质点摆动一周所需的时间与它到悬点的垂直长度的平方根成正比。他还证明了, 摆线摆是等时的。这本著作又研究了维持一个物体在圆周上运动所需的力, 并证明这个力可用熟知的关系 $P = \frac{mv^2}{r}$ 来表示。在这本著作中可以看到关于重物下降问题的充分论述, 包括自由下降或沿光滑曲线下降。惠更斯在其研究工作中广泛应用了这样一个原理: 如果一个重物系统在重力作用之下开始运动, 则其运动不可能使它们的重心全部升高到超过它开始下降的那一点。

惠更斯在上述论著中处理许多力学问题时, 显示了非凡的技巧。和沃利斯的 *De Motu* 一样, 惠更斯 *Horologium* 一书也是力学这门学科发展中的重要标志。

伽利略、沃利斯和惠更斯的贡献已经把力学提升到这样的高度: 如果不发明出新的、更有力的几何方法, 就几乎不能取得进一步的发展了。幸运的是, 这些发明没有被耽搁很久。牛顿已经开始在集各家之大成, 距离开始形成完整雏形的时间已经不远了。牛顿对力学的突出贡献将在后面的章节中作重点介绍。

第九章 小数和对数的发明

小数的发明 在我们正在回顾着的这一段时期中,计算方法由于两个发明而得到有力的推进,这就是小数和对数的发明。小数的符号很早就已出现,在求一个数的根数的方法中可以看到。例如印度人在试图求一个不尽根数的平方根时,曾想到增加偶数个零的办法。例如在求 $\sqrt{8}$ 时增加 6 个零。对这样得到的数(即 8 000 000),用他们的办法能求出它的近似平方根,再将所得答案除以 1 000 就可得到所求的平方根,为此把所得答案中的最后三个数字用一根线与其他数字分离开来。15 和 16 世纪的许多其他作者都仿效过这种办法,特别是卡尔丹和韦达,但是进一步的发展很缓慢,很难理解为什么会如此。我们也许预期,印度和阿拉伯人关于小于单位数的记数法当然会随即得到推广,特别是在建立了表示零的符号以后。但是,直到 16 世纪末我们才第一次看到对这种记数制进行系统的研究。1585 年斯特文的小册子 *La Disme* (《论小数》) 出版了,这本小册子清楚地说明了这种记数制的原理以及其用法上的便利。

斯特文首先用一个符号①把整数部分和分数部分分离开来,把它放在个位数字的后面或上面。然后他说道:

“开始时个位数字的十分之几,我们叫它', 它的符号是①,' 的个位数字的十分之几,我们叫它", 它的符号是②。就这样,一个接着一个,前一个个位数字之后,接着就是十分之几的数字。如 3①7②5③9④, 就是 $3'7''5'''9''''$, 如此直到无穷。至于它们的数值,很明显,按照定义,上述数字的值是 $\frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1\,000} + \frac{9}{10\,000}$ 总共等于 $\frac{3\,759}{10\,000}$ 。8①9①3②7③的值是 $8 + \frac{9}{10} + \frac{3}{100} + \frac{7}{1\,000}$, 总共等于 $8\frac{937}{1\,000}$ 。”

接着就是用大量例子说明怎样进行基本算术运算。它们与现在所用的方法没有什么很大不同。例如 $32\textcircled{0}5\textcircled{1}7\textcircled{2}$ 乘以 $89\textcircled{0}4\textcircled{1}6\textcircled{2}$ (即 32.57×89.46) 的乘法进行如下:

$$\begin{array}{r}
 \textcircled{0}\textcircled{1}\textcircled{2} \\
 3257 \\
 8946 \\
 \hline
 19542 \\
 13028 \\
 29313 \\
 26056 \\
 \hline
 29137122 \\
 \textcircled{0}\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}\textcircled{4} \quad \text{即 } 2913.7122
 \end{array}$$

不言而喻,除法比较麻烦些。先用普通方法求得商,且不管分号的位置。以后的步骤如下:假定被除数是 $3\textcircled{0}4\textcircled{1}4\textcircled{2}3\textcircled{3}5\textcircled{4}2\textcircled{5}$, 即 3.443 52, 除数是 $9\textcircled{1}6\textcircled{2}$, 即 0.96, 商的各位数字是 3, 5, 8, 7。为了找到分号的位置, 可从被除数最后一位数字 5 (也就是最后一位用圆圈围起来的数字) 中减去除数最后一位数字 2 (同样的定义), 所得余数是 3, 这就是商的最后一位数字 (也是同样的定义)。所以商是 $3\textcircled{0}5\textcircled{1}8\textcircled{2}7\textcircled{3}$, 即 3.587。

小数制很快就在全欧洲得到普及, 特别是在对数发明以后。斯特文的笨拙记法寿命很短, 但是, 为了在表示小数部分的位置时保持做法统一而做的种种尝试并未取得多大成功。纳披尔在 *Rabdologlae* (《小数算法》, 1617) 一书中是用一撇把小数部分分开, 赖特在翻译他的论对数的著作时, 在第 1 页上就出现了小数点。

但是, 这种方法没有普遍化, 这可能因为当时的作者 (例如哈里欧) 习惯于用一点来表示乘法。布里格斯在 *Arithmetica Logarithmica* (《对数算术》) 一书中是在小数部分的数字下面画一根水平线, 例如把 34.651 写成 $34 \underline{651}$, 并且他对此这样解释道: “如有一数, 在它下面画了一根线, 那么线上的数字乃是 ‘代表数’。它们确定着一个分数, 我们总要把它的分母了解为 1 再附以与线上数字的个数同样多个零, 例如 $\underline{75}$ 是代表 $\frac{75}{100}$ 或 $\frac{3}{4}$, $59 \underline{321}$ 是代表 $5 \frac{9321}{10000}$ 。”沃利斯曾仿照乌特勒把 3 579.753 写成了 $3\,579/\underline{753}$ 。30 年后, 沃利斯在其出版于 1685 年的《代数》一书中把小数写成了现在的形式。

乌特勒在 *Clavis Mathematicae* (《数学入门》) 一书第 3 页中采用了更

方便的小数写法,这可从下面引出的该书的一段话中清楚地看出:

“小数部分与整数部分可以写在同一条线上,但要用一垂直线将其分开,因此它可以叫做‘分隔线’。就像在整数中,从个位数字起每进一位就增大 10 倍一样,在小数部分中也是如此:其位数用除法来区分,即用 10 的连乘积去除,先用 10 除单位 1,然后再对这样得到的位数逐项用 10 除,可看它到单位 1 的位置如何,用指数或幂来表示。”

“小数部分的分母取决于它们最后一位数字的位置,例如 $0|5$ 是 $\frac{5}{10}$, $0|56$ 是 $\frac{56}{100}$, 依此类推。”

“在整数之前或小数之后的圆圈或零没有什么意义,但在整数之后和小数之前的零却表明个位数两边数字的位置。根据这一位置可以判别该数的数值,像 0005 仅仅表示 5 , $0|500$ 是 $\frac{5}{10}$ 。”

“所以在写小数部分时,总要把分隔线画出来,如有空位则用零来填补,例如 $0|00005$ 是 $\frac{5}{100\ 000}$ 。”

斯特文的著作在 1608 年曾由罗伯特·诺曼译成了英文,题为 *The Art of Tenths, or Decimall Arithmetike* (《关于十分之一的技巧,或小数算术》)。在斯特文用圆的地方,诺曼用的是括弧。

对数的发明 “现代计算方法之所以有奇迹般的力量,是由于三个发明,即阿拉伯计数法、小数和对数。”^① 其中最后一项紧接着小数的发明,很合时宜。天文学和三角学的迅速发展,以及人们对化圆为方这个古老问题的重感兴趣,都要求改进计算方法。对数的发明为了满足这一要求走了一段漫长的道路。

在早先那些世纪的数学里,可以说没有什么东西能导致这一发明。“对数的发明就像是一个晴天霹雳来到世界上。前人的任何工作都未能导致这项发明,没有什么东西预见到它或预示它的到达。这项发明是孤立的,它没有借助其他智力工作,也没有遵循原有的数学思想路线,就突然闯到人类思想中来。”^②

这项发明应当归功于曼彻斯特的贵族约翰·纳波尔(1550 ~ 1617)。

① *Cajori*, 149 页。

② *Napier Tercentenary Volume*, Inaugural Address by Lord Moulton (《纳波尔 300 周年纪念文集》中麦尔顿男爵的序言), 3 页。

他在 1614 年出版了 *Mirificae Logarithmorum Canonis Descriptio* (《关于对数的奇异规则的说明》) 一书, 其中解释了他这项发明的特点。在纳波尔的思想中, 并没有把对数当做指数的概念。事实上, 当时关于非正整数的指数概念还是模糊的。纳波尔解释他的办法是靠运动学的方式。

假定有两个质点 P 和 Q , 前者沿一有限长的直线 AZ 运动, 后者沿一无限长的直线 $A'Z'$ 运动。(图 14) 两个质点开始运动时速度相同。 Q 保持这一速度不变, 而 P 的速度则以如下方式变化: 在其路径上任一点 B 的速度与它尚须经过的距离成正比, 即与 BZ 成正比。现在, 如果当 P 位于某点 B 时, Q 位于 B' , 则 $A'B'$ 便是 BZ 的对数。

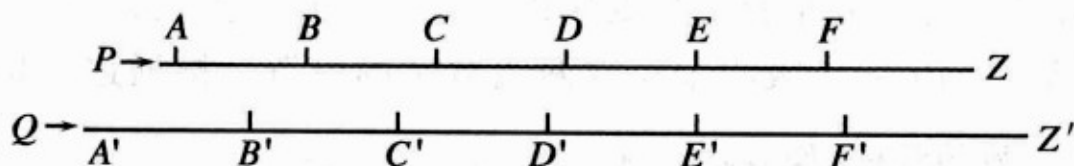


图 14

这种引入对数的方法和现代对数概念的联系看来也许不大, 但其基本原理相同, 这就是: 二者均具有算术级数和几何级数之间的对应关系。让我们按照纳波尔的方法, 假定 AZ 的长度是 10^7 单位长, 然后每个质点以一定速度开始运动, 我们可令这一速度为 10^7 。 Q 始终保持这一速度不变, 但 P 的速度递减。让我们再假定 $A'B'$ 代表单位距离, 于是 Q 经过 10^{-7} 这段时间以后将到达 B' 点。在这段很短的时间中, P 所经过的距离接近于相同, 亦即 AB 近似地等于 1。因此距离 BZ 是 $10^7 - 1$, 这就度量出 P 在 B 点的速度。在下段短时间间隔 10^{-7} 中, Q 将到达 C' 而 P 到达 C , 这里 $BC = 10^{-7}(10^7 - 1)$ 或 $1 - 10^{-7}$ 。因此距离 CZ 是 $10^7 - 1 - (1 - 10^{-7})$ 或 $10^7(1 - 10^{-7})^2$, 这就度量出 P 在 C 点的速度。同理, 如果 P 在相继的各段短时间中到达 D, E, F, \dots 则距离 DZ, EZ, FZ, \dots 将是

$$10^7(1 - 10^{-7})^3, 10^7(1 - 10^{-7})^4, \dots$$

因此沿 AZ 测得的这些距离构成一几何级数, 而沿 $A'Z'$ 测得的相应距离显然构成一算术级数。作为上述对数之特征的, 是如下一个事实: 当真数按几何级数增加时, 其对数按算术级数增加。

由纳波尔的定义可以得到一个更精确的关系。让我们回到图 14, 令 $AZ = a, BZ = y, A'B' = x$, 于是 AB 为 $a - y$ 。因此质点 P 在 B 点的速度可由 $\frac{d(a - y)}{dt}$ 给出, 由定义, 它等于 y 。因此我们可写成:

$$\frac{d(a-y)}{dt} = y$$

由此可得

$$-\log_e y = c + t$$

但在 A 点有 $t = 0, y = a$, 所以 $c = -\log_e a$ 。

此外, 因为 Q 沿 $A'Z'$ 作匀速运动, $\frac{dx}{dt} = A$ 点的速度 $= a$, 所以 $x = at$ 。

因此上述关系变成:

$$-\log_e y = \frac{x}{a} - \log_e a$$

或

$$x = a(\log_e a - \log_e y)$$

但由定义,

$$x = \text{Nap. log } y^{①}$$

因此

$$\text{Nap. log } y = a(\log_e a - \log_e y) = a \log_e \left(\frac{a}{y} \right)$$

纳波尔原来的目的是要简化三角运算, 他很可能是由于考虑到 $2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$ 这类关系而导致这种想法的。在这类关系式中, 两个三角函数的乘积能表示成另外两个三角函数之和(或差)。在这类计算中经常出现 $\sin 90^\circ$ 。在这个时期, 使用小数还是新奇的事, 而且一般来说, 数学界还不知道小数。因为当时仍然习惯于把正弦看做一个画在具有适当半径的圆中的线段, 所以只要把半径取得很大, 比如说取到 10 000 000 就可以获得必要的准确度。纳波尔也是采取这一做法。他认为 AZ(图 14)所代表的应当是 $\sin 90^\circ$, 其长度为 10^7 。由上述运动学的考虑可知, $\sin 90^\circ$ 的对数(即 10^7 的对数)应为零, 因此上述关系可以写成:

$$\text{Nap. log } y = 10^7 \log_e \left(\frac{10^7}{y} \right)$$

10^7 的对数是零, 由此可知一个数若大于 10^7 , 则其对数应为负数。

Unde sinus totius 10 000 000 nullum seu 0 est logarithmus, et per consequentes numerorum majorum sinu toto logarith sunt nihilo minores. ②

显然, 通常用于对数运算的法则不适用于纳波尔对数。Nap. log xy 不等于 Nap. log x + Nap. log y 。因为从上述关系可知:

① 即 x 等于 y 的纳波尔对数。——译注

② *Descriptio*, Lib 1. Cap. 1. p. 4(《关于对数的奇异规则的说明》, 第一卷, 第一章, 4 页)。“因此全正弦 10 000 000 的对数是无或零, 因而一个数如果大于全正弦, 则其对数小于零。”

$$\text{Nap. log } x = a \log_e \left(\frac{a}{x} \right) = a (\log_e a - \log_e x)$$

$$\text{Nap. log } y = a \log_e \left(\frac{a}{y} \right) = a (\log_e a - \log_e y)$$

$$\text{Nap. log } xy = a \log_e \left(\frac{a}{xy} \right) = a (\log_e a - \log_e x - \log_e y)$$

最后一个式子不是前两个式子之和,但某些关系式仍然成立。例如,若 $\text{Nap. log sin } 90^\circ$ 或 $\text{Nap. log } 10^7$ 是零,则可推知对任意三角形有

$$\text{Nap. log sin } A - \text{Nap. log sin } B = \text{Nap. log } a - \text{Nap. log } b \cdots$$

因为利用前面已求得的关系,我们有

$$\begin{aligned} & \text{Nap. log sin } A - \text{Nap. log sin } B \\ &= 10^7 \log_e \frac{10^7}{\sin A} - 10^7 \log_e \frac{10^7}{\sin B} \\ &= 10^7 (\log_e 10^7 - \log_e \sin A - \log_e 10^7 + \log_e \sin B) \\ &= 10^7 (\log_e \sin B - \log_e \sin A) \\ &= 10^7 \log_e \left(\frac{\sin B}{\sin A} \right) \\ &= 10^7 \log_e \left(\frac{b}{a} \right) \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} & \text{Nap. log } a - \text{Nap. log } b \\ &= 10^7 \left(\log_e \frac{10^7}{a} - \log_e \frac{10^7}{b} \right) \\ &= 10^7 (\log_e 10^7 - \log_e a - \log_e 10^7 + \log_e b) \\ &= 10^7 (\log_e b - \log_e a) \text{ 或 } 10^7 \log_e \left(\frac{b}{a} \right), \text{ 与前式相同。} \end{aligned}$$

纳波尔的发明对亨利·布里格斯(1561~1631)的影响很大,布里格斯后来曾任牛津大学的首任萨弗尔数学教授^①,同时又是伦敦格雷欣学院^②的几何学教授。1615年他在格雷欣学院所作的讲演中曾提醒人们注意,如果像纳波尔所提出的那样,仍把零作为全正弦的对数,那就

① 萨弗尔,亨利·萨弗尔(Henry Savile, 1549~1622)爵士,学者,伊丽莎白女王的希腊文与数学私人教师。1585年任麦尔顿(Merton)县知事。1596年任伊登(Eton)市市长。1619年在牛津大学设立几何学与天文学讲座。——译注。

② 格雷欣,托马斯·格雷欣(Thomas Gresham, 1519~1579)爵士,皇家交易所的创始人。诺佛克(Norfolk)世家的富商。1537年被选为伦敦市长。曾出资建立格雷欣学院。

——译注。

会更加方便,而全正弦的 $\frac{1}{10}$ (即 $\sin^{-1}0.1$)或 $5^{\circ}44'21''$ 的对数则应为10 000 000 000。他为了会见纳波尔,曾到北方作过一次艰苦的旅行,在会晤中扼要叙述了自己的建议,那时纳波尔已经打算改变主意,他建议零应当是1的对数,而10 000 000 000应是全正弦的对数。这就会使得所有大于1的数的对数都是正数。布里格斯马上同意了这个建议。从布里格斯发表的对数表中可以清楚地看出,最后确定下来的办法是把10的对数作为1,1的对数作为零。其结果就是以10作为这种对数的底。这种作法的优点在于简化了 $\log x, \log 10x, \log 100x, \log \frac{x}{10}$ 等之间的关系。在纳波尔对数中,这些对数之间的关系用到了2 302 584这个数或其倍数的加减。因为

$$\begin{aligned}\text{Nap. log } x &= a \log_e \left(\frac{a}{x} \right) = a (\log_e a - \log_e x) \\ \text{Nap. log } 10x &= a \log_e \left(\frac{a}{10x} \right) \\ &= a (\log_e a - \log_e 10 - \log_e x)\end{aligned}$$

二者相差 $a \log_e 10$,它等于2 302 584,当 $a = 10^7$ 时,便等于它的倍数。

*Canonis Descriptio*一书除了对对数的性质作了说明之外,还有一张第一象限角的、以 $1'$ 为间隔的普通正弦及其对数的表,计算到7位。表中的对数并不是今天所称的纳波尔对数,即不是双曲对数或以 e 为底的对数,但与后者有联系,这从下文所提的一本著作的赖特译本的抄本中可以看出。这些对数的值恰好比自然对数大10 000 000倍,或者用同样的说法,它们是一个数的10 000 000次幂的对数。事实上纳波尔的确写道:任何数的对数都是把给定一个数自乘10 000 000次后得到的结果,他实际上就是用这个方法算出2的对数的。纳波尔在*Descriptio*一书中只是说明了对数能有的用处。他曾答应在以后一本著作中解释他是用怎样的方法构想出对数的。这本著作就是他的*Mirifici Log arithmorum Canonis Constructio*(《关于对数的奇异规则的结构》)。然而,这本著作直到他去世两年以后,即1619年才得以出版。当时布里格斯已在开始建立一种新型的对数,其中1的对数是零,而10与1之比的对数是1。他算出了从1到1 000的对数,计算至14位小数,并在1617年把他的结果印成了一本8开本共16页的小册子,叫做*Logarithmorum Chilias Prima*(《一千个数的对数》)。其中一部分如下表所示:

	对数
1	00 000 000 000 000
2	30 102 999 566 398
3	47 712 125 471 966

	对数
34	153 147 891 704 226
35	154 406 804 435 028
67	182 607 480 270 083

这是迄至当时发表出来的第一张常用对数表。

继此之后,布里格斯便着手进行一项庞大的工作,即将 1 到 100 000 之间的全部数字的对数计算到 40 位小数。在他出版于 1624 年的 *Arithmetica Logarithmica, sive Logarithmorum Chiliades Triginta* (《对数算术,或 3 万个数的对数》)一书中,包括前 2 万个数和后 1 万个数的对数。当中 20 000 到 90 000 这些数的对数,乃是由一位荷兰书商阿德兰·弗拉克把它们计算到了 10 位小数,1628 年 he 把它们和布里格斯的结果放在一起印在他的 *Arithmetica Logarithmorum* (《对数算术》)一书中。这本书已经译成了英文,题为 *Logarithmicall Arith metike, or Tables of Logarithmes for Absolute Numbers, from an Unite to 100 000, as also for Sines, Tangents and Secants for every Minute of a Quadrant* (《对数算术,或绝对值从 1 到 100 000 的对数表,附有第一象限角的,以 1' 为间隔的正弦、正切与正割值》)。布里格斯在其《对数算术》一书中详细解释了他的方法。这就是把 10 (其对数是 1) 不断开平方,因而把前一平方根的对数除以 2 就可以得到后一平方根的对数,例如:

真数	对数
10	1
$\sqrt{10} = 3.162\ 277$	0.5
$\sqrt[4]{10} = 1.778\ 279$	0.25
$\sqrt[8]{10} = 1.333\ 521$	0.125
$\sqrt[16]{10} = 1.154\ 781$	0.062 5

这件工作的规模从下一事实可知:他不断开平方根达 54 次,并把它们计算到 30 位小数。

杰斯特·别尔基 在这段时期,能掌握对数基本原理并能用它来造表的另一位仅有的数学家,就是瑞士的杰斯特·别尔基(1552 ~ 1632)。他的 *Arithmetische und Geometrische Progress - Tabulen* (《算术与几何级数表》)是 1620 年在布拉格出版的,那是在纳波尔的 *Descriptio* 发

表之后 6 年。其中载有两串数字：

0	1 000 000 000
10	100 010 000
20	100 020 001
30	100 030 003
⋮	⋮
990	100 994 967

第一列被印成红色，是算术级数，第二列被印成黑色，是几何级数。其公比为 1.000 1。因此，别尔基实际上已经想到算术级数和几何级数之间有一种对应关系，事实上，这个表所给出的乃是 $10^3 \times (1.000\ 1)^n$ 和 10^n 当 n 为整数时的值。因为它可以写成：

$$\begin{array}{ll}
 10 \times 0 & 100\ 000\ 000 = a \\
 10 \times 1 & 100\ 010\ 000 = ar = 10^8 \times 1.000\ 1 \\
 10 \times 2 & 100\ 020\ 001 = ar^2 = 10^8 \times (1.000\ 1)^2 \\
 10 \times 3 & 100\ 030\ 003 = ar^3 = 10^8 \times (1.000\ 1)^3 \\
 \vdots & \vdots \\
 10 \times n & = ar^n = 10^8 \times (1.000\ 1)^n
 \end{array}$$

假定把 10^8 记为 a ，则有 $10n = a \times (1.000\ 1)^n$ ，亦即 $(1.000\ 1)^n = \frac{10n}{a}$ 。

或以 1.000 1 为底的 $\log \frac{10n}{a}$ 是 n ，也就是说， $\frac{10n}{a}$ 是 n 的反对数，底是 1.000 1。如果这样来看，别尔基的表就是一张变相的反对数表了，其底是 1.000 1。但我们要着重指出，无论和布里格斯或和纳波尔比较起来，别尔基同样没有关于对数的“底”的观念，因为和他们两人一样，他也不是从 $a^x = N$ 这个关系出发的。

在 17 世纪前几十年间，整个欧洲很快就采用了对数，这主要是由于布里格斯的热心。另外有些英国人也起了突出的作用。由于了解到新计算方法对于航海术的重要性，爱德华·赖特曾在 1616 年把纳波尔的《关于可钦佩的对数表的说明》译成了英文。其中包括 72 个正弦值的对数，都是略去了小数点的自然对数。附录（其思想来自乌特勒）中有一个关于 $\log 10 = 2\ 302\ 584$ 的说明，它是略去了小数点的 10 的自然对数，即 $\log_e 10 \times 10^6$ 。这是最早出现的自然对数。在赖特的书中有一部分的形式是这样的：

Deg. 30		+ / -					
M	sines	Logarith	Differen	Logarith	Sines		
0	500 000	693 147	549 306	143 841	866 025	60	
1	500 252	692 643	548 643	144 009	865 880	59	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
30	507 538	678 183	529 252	148 930	861 629		
					Deg 59	min	

为了弄明白这张表,要记得第三列的数字乃是如前定义的纳波尔对数,即 $\text{Nap. log } y = a \log\left(\frac{a}{y}\right)$ 。这里 a 为全正弦的对数,其数值由第二列的数字显然可知是 10^6 。因此

$$\begin{aligned}\text{Nap. log } 500\,000 &= 10^6 \log_e\left(\frac{10^6}{500\,000}\right) = 10^6 \log_e 2 \\ &= 10^6 \times 0.693\,147\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Nap. log } 507\,538 &= 10^6 \log_e\left(\frac{10^6}{507\,538}\right) \\ &= 10^6 (\log_e 10 - \log_e 5.075\,38) = 678\,183\end{aligned}$$

这就是第三列中的数字。1619年,约翰·司皮得尔出版了 *New Logarithmes* (《新对数》)一书,其中包含从 0° 到 90° 的以 $1'$ 为间隔的正弦、正切和正割的对数值,计算到 6 位数字,表的排法如下所示:

Deg. 11		Nombres for the					
M	Sine	Comp.	Tang.	Comp.	Secant	Comp.	
0	834 352	998 146	836 206	163 794	1 854	165 648	60
1	834 501	998 140	836 361	163 639	1 860	165 449	59
2	834 651	998 134	836 516	163 484	1 866	165 349	58
3	834 800	998 129	836 671	163 329	1 871	165 200	57

该书在再版中(1622)载有 1 到 1 000 的对数表,它们虽然与自然对数不完全相同,但从它们不难导出自然对数来。1631年,雷恰·诺乌出版了一本书,名为《三角学,或关于三角形的学说》两卷本,均根据对数这一最新的杰出发明编成。该书有助于新方法的推广。应当说,第一个就三角函数算出布里格斯对数或常用对数的人乃是格雷欣学院的天文学教授爱得蒙·冈特。他在 1620 年出版了 *Canon Triangulorum sive Tabulæ Sinuum et Tangentium Artificialium ad Radium 100 000 000* (《三

角形规则,或到 100 000 000 的正弦和正切值表》)。这是一本从 0° 到 90° 并以 $1'$ 为间隔的正弦和正切的 7 位对数表,因为布里格斯对于自然数已经完成了这些三角函数的对数。布里格斯晚年一直献身于计算三角函数的对数,在他逝世的时候差不多已经完成了这项工作。计算是以 $\left(\frac{1}{100}\right)^\circ$ 为间隔,一直到 13 位。这项工作后来由他在格雷欣学院的同事亨利·杰利伯兰全部完成,并终于在 1633 年以 *Trigonometria Britannica, sive Doctrina Triangulorum* (《不列颠的三角,或关于三角形的学说》) 为名发表。大约在同时,弗拉克出版了他的 *Trigonometria Artificialis* (《三角对数表》),其中给出了正弦、正切和正割的 7 位对数值,以 $10''$ 为间隔。可以发现,在弗拉克的作品中最早提到了常用对数的基本原理。布里格斯始终没有说明他是在什么时候或者为什么采用 $\log 10 = 1$, $\log 1 = 0$ 的制度的。但在弗拉克的 *Tabulae Sinuum, Tangentium et Secantium, et Logarithmi Numerorum ab 1 ad 10 000* (《1 到 10 000 的正弦、正切和正割值以及对数值表》) 中却清楚地提到了为什么采用它。“为了更多的方便,”他写道,“取 1 的对数是 0, 10 的对数是 1.000, 100 的对数是 2, 依此类推如下表:

真 数	对 数
1	0.000 000
10	1.000 000
100	2.000 000
10 000	3.000 000
100 000	4.000 000

这里出现有‘首数’的字样。这儿你要注意,对数的第一位数字称为‘首数’,它总是比取对数的那个整数数字的个数小 1。例如,由于 $\log 3\,567\,894$ 是 6.552 411 8,故可推知

$$\log 3.567\,894 = 0.552\,411\,8$$

$$\log 35.678\,94 = 1.552\,411\,8$$

$$\log 356.789\,4 = 2.552\,411\,8$$

等等。”

在欧洲大陆,开普勒对于新方法的热忱并不亚于布里格斯。1624 年他在马尔堡出版了一种纳波尔正弦对数表,促进了新方法在德国的流行。翌年爱德蒙·温盖特又在巴黎出版了 *Arithmetique Logarithmetique*

(《对数算术》)。书中包括 1 到 1 000 的 7 位对数,还有正弦和正切的对数,这是出现在欧洲大陆的第一本布里格斯对数表。编造对数表的新方法是由格雷果里(*Vera Circuli et Hyperbolæ Quadratura*,《圆周和双曲线的正确求积法》,1667)和墨卡托(*Logarithmotechnia sive Methodus Construendi Logarithmos, nova, accurata et facilis*,《对数技术,或正确、方便的编造对数的新方法》,1668)想出的。

专门术语的命名 纳披尔在其 *Constructio* 一书中曾用过“人造数”(numerus artificialis)这一术语。以后,他又引入了“对数”(比数, logarithm, ratio unumber)一词。“首数”(characteristic)一词是 1624 年在布里格斯的表中出现的,也曾出现在弗拉克的著作^①中。Si datur numerus $3.567\ 894 = 3 \frac{567\ 894}{1\ 000\ 000}$ vel $35 \frac{67\ 894}{100\ 000}$ vel $356 \frac{7\ 894}{10\ 000}$ Logarithmi eorum iidem sunt, qui numeri integri 3 567 894, excepta tantum Characteristica aut prima figura, et modus eos inveniendi prorsus est idem.

$$\text{Nempe quia } \log 3\ 567\ 894 = 6.552\ 411\ 8$$

$$\text{erit } \log 3.567\ 894 = 0.552\ 411\ 8$$

$$\log 35.678\ 94 = 1.552\ 411\ 8 \text{ etc.}$$

(如果数是 $3.567\ 894 = 3 \frac{567\ 894}{1\ 000\ 000}$ 或 $35 \frac{67\ 894}{100\ 000}$ 或 $356 \frac{7\ 894}{10\ 000}$ 它们的对数相同,其整数是 3 567 894,只有首数或第一式例外,求证的方法完全相同。因为

$$\log 3\ 567\ 894 = 6.552\ 411\ 8$$

$$\text{则 } \log 3.567\ 894 = 0.552\ 411\ 8$$

$$\log 35.678\ 94 = 1.552\ 411\ 8 \quad \text{等等}$$

“对数尾数”(mantissa)一词是在沃利斯《代数》(1693)一书的第 4 页上出现的。然而,这些术语直到 1748 年欧勒的 *Introductio in Analysin Infinitorum*(《无穷小分析引论》)发表之前都还没有通行起来。

^① Adriani Vlacq, *Tabula Sinuum, Tangentium et Secantium, et Logarithmi Numerorum ab Unitate ad 10 000*.

第十章 微积分的发明

在我们考察最终导致微积分发明的最后几个步骤之前,先回忆一下数学界为了准备这一伟大发明所历经的道路是有帮助的。为了给微积分确定它的最后形式,虽然其间有极高天赋的人的加入,但它仍有一段漫长的历史。微积分并非没有其前身而突然产生的,它的发明是通过许多学者长期的辛勤探索发展起来的一连串数学思想的结晶。我们在前几章曾指出,欧铎克色斯和阿基米得在确定一条曲线所围的面积时用过穷竭法,在这个方法中可以清楚地看到无穷小分析的原理。我们也看到,在经过将近 2 000 年之后,卡佛来利又重新恢复了这方面的探索。他用他所发展起来的极微分割法能算出许多图形的面积和体积,虽然在他的工作中所用的只是一些解决特殊问题的孤立的、比较粗糙的方法,但仍可得出正确结果。卡佛来利的方法后来又经过托里切利、罗伯佛尔、费尔马、惠更斯、沃利斯和巴罗等许多几何学家的推广与改进,逐渐开始形成了今天积分学中求和法的形式。

然而,在作曲线的切线问题——它本质上就是微分学中的基本问题——上,理论进展是比较缓慢的。阿基米得曾试图作螺线的切线,但是这是孤立的例子。除此以外,直到 17 世纪上半叶,还没有发现微分学的预兆。阿基米得的贡献虽然重要,但我们切切不要把它估计过高,认为他就是微分学的真正创始人。在他的著作中,没有什么证据说明他已得到了求任意曲线之切线的普遍方法。事实上,关于一个函数对应于一条曲线的观念是直到笛卡儿和费尔马注意到它以后才发展起来的。作为微分学真正基础的极限概念,则与希腊人的想法毫无共同之处,所以对阿基米得的著作而言,最多只能说它对后来的发展有聪明的预感罢了。为了了解微分学的真正的最初进展步骤,我们就

应该回到曲线的切线问题上来。试图解决这个问题的,在法国有笛卡儿、罗伯佛尔和费尔马,在英国有巴罗。

笛卡儿留给我们两种作曲线之切线的方法,一种是在《几何学》一书中提出的,另一种是在他的《书信集》中提出的,提出得要晚得多。在后一方法中,他假想有一直线围绕曲线轴上一点转动。在圆锥曲线的情形,这条直线可以交曲线于两点,但当直线趋近或远离曲线轴的时候,这两点就逐渐接近并终于重合。因此,他是把切线看成割线的极限位置的。

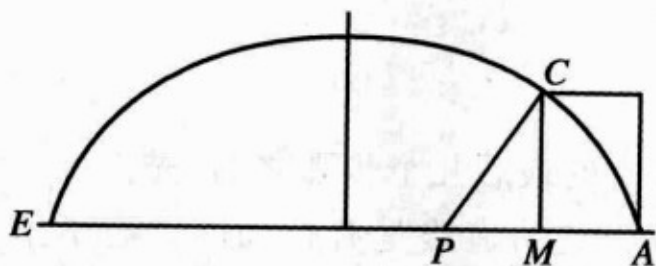


图 15

在《几何学》一书中所叙述的方法比较含糊,但实质上它是如下的方法。首先要在椭圆 ACE 的任一特定点上作其法线。(图 15)切线将和它相交成直角。

笛卡儿实际上是说,假定给定点 C 的坐标是 $x = CM$ 和 $y = AM$ 。又假定法线 CP 已作出,它与曲线轴交于 P 点,并令 $PC = s$, $PA = v$ 。如果 r 是曲线的正焦距, q 是其长轴,则由阿普罗尼亚斯定理 13 可知:

$$x^2 = ry - \frac{ry^2}{q}$$

但从图中可以看出

$$s^2 = (v - y)^2 + x^2$$

$$\text{或} \quad s^2 - (v - y)^2 = x^2 = ry - \frac{ry^2}{q}$$

一般地说,以 P 为圆心, $PC (= v)$ 为半径所画出的圆会相交椭圆于两点。但如果 PC 是法线,那么这两点就会重合,亦即上一方程的两个根相等。因此,如果这方程有重根的条件得到满足,则可确定使 PC 成为法线的 v (或 s) 的值。这样,截取 $AP = v$ 并连 PC 即可作出法线。

笛卡儿特别喜欢这种方法,并宣称它适用于任何几何曲线,包括以他的名字命名的卵形线在内。

在应用无穷小量的概念来确定曲线的切线时,和确定它们纵坐标的极大极小值的类似问题一样,罗伯佛尔和费尔马两人差一点就完成了微积分的发明,乃至拉格朗日曾断言后者就是微积分的真正发明人。这位著名的分析学家说道,“我们可以认为费尔马是这种新计算

的第一个发明人”^①。牛顿的自白也许更能说明问题：“我从费尔马的切线作法中得到了启示，我推广了它，把它直接地并且反过来应用于抽象的方程上。格雷果里先生和巴罗博士也用过并且改进了这种作切线的方法。”^②

从费尔马的书信中可以判断出，他的方法大约发明于 1629 年。这种方法大体上是这样：

假定给定一抛物线 BD ，其轴为 CD 。（图 16）试在此曲线上任一点 B 求作一切线。费尔马说，让我们假定切线已作出，并假定它与曲线轴的延长线交于 E 点，亦即 BE 是所求的切线。今在 BE 上任取一点

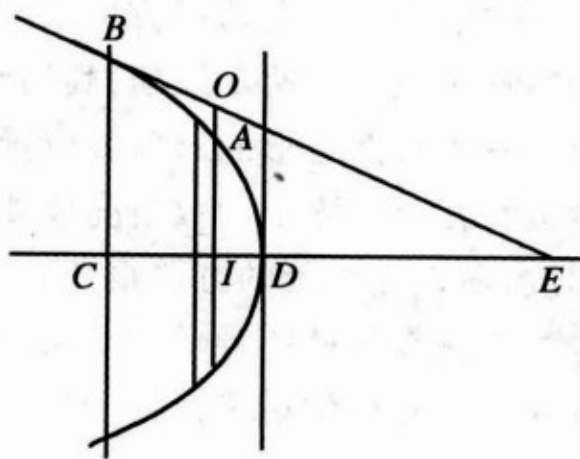


图 16

O 并作纵坐标 OI ，它与曲线交于 A 点。现在由抛物线的性质可知

$$\frac{BC^2}{IA^2} = \frac{CD}{ID}$$

因为 O 点位于抛物线之外，故可推得

$$\frac{CD}{ID} > \frac{BC^2}{OI^2}$$

但由相似三角形可知

$$\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CE^2}{IE^2}$$

因此，

$$\frac{CD}{ID} > \frac{CE^2}{IE^2}$$

现在 B 点已给定，纵坐标 BC 是已知的，所以 C 点也已知，结果 CD 的长度就已知。设以 d 表示 CD ， a 表示 CE ， e 表示 CI ，我们有

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{(a-e)^2}$$

即

$$a^2 d - 2ade + de^2 > a^2 d - a^2 e$$

即

$$de^2 + a^2 e > 2ade$$

即

$$de + a^2 > 2ad$$

① Brewster, *Life of Sir Isaac Newton*, 1831, 183 页。

② Turnbull, *Mathematical Discoveries of Newton*, 1945, 5 页。

现在,如果把 O 移到与 B 重合的位置,于是两者将变成相等, e 将等于零,因而 de 也等于零。 BE 将变成切线,而上述关系则变成 $a^2 = 2ad$,即 $a = 2d$ 。因此要在 B 点作切线时,可作纵坐标 BC ,并在曲线轴的延长线上标出一段距离 CE 等于 $2CD$,再连 EB 即得。

罗伯佛尔曾把切线方向看做是描出此曲线的点的运动方向。他假定这个点参与两个运动,其相对速度与曲线的性质有关。而切线则位于一平行四边形的对角线位置,此平行四边形的相邻两边与两个速度成正比。但除了少数情况以外,他没有令人满意的方法来确定这些速度,所以尽管他的方法很巧妙,而应用价值不大。

牛顿在剑桥的导师伊索克·巴罗,在 *Lectiones Opticæ et Geometricæ* (*《光学与几何学讲义》*,1669)一书中出人意料地几乎发现了微积分。

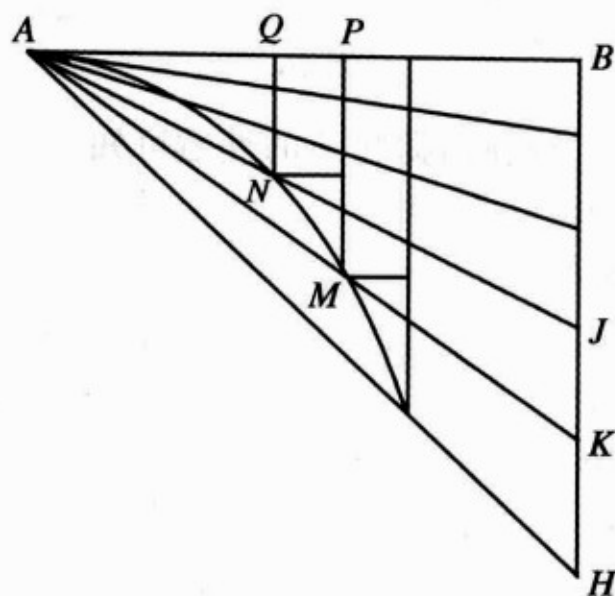


图 17

这本著作的内容尽是关于曲线的切线作法以及确定曲线下面积的方法。在这些方法中,可以清楚地看到有些地方与牛顿后来所用的方法很相像。巴罗在他的切线作法中,用了两个无穷小量。下面的例子可以说明这点。

ABH (图 17)是一直角, A 是固定点, K 是 BH 上的任意一点。连 AK 并在其上取一点 M ,使得 $AM = BK$ 。试在 M 点所描出的曲线上的任一点求作一条切线。

巴罗首先得到了这条曲线的方程。如果垂直于轴 AB 作一段 PM ,且 PM 和 AP 分别是 y 与 x , AB 是 r ,则 $BK:y = r:x$,即

$$BK = \frac{ry}{x}$$

此外,

$$AM^2 = x^2 + y^2$$

因为 $BK = AM$,所以

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{ry}{x}\right)^2$$

即

$$x^4 + x^2 y^2 = r^2 y^2 \quad (i)$$

这就是点 M 的轨迹方程。现在,巴罗在此曲线上 M 点的紧邻取一点 N ,使得 $AN = BJ$,并使其相对于 A 的坐标是 $(x - e)$, $(y - a)$ 。从图中可以看出:

$$(x - e)^2 + (y - a)^2 = AQ^2 + QN^2 = AN^2 = BJ^2 \quad (\text{ii})$$

$$(x - e) : (y - a) = AB : BJ$$

$$= r : BJ$$

因而

$$BJ = \frac{r(y - a)}{x - e} \quad (\text{iii})$$

或

$$BJ^2 = \frac{r^2 y^2 - 2r^2 ya + r^2 a^2}{x^2 - 2xe + e^2}$$

如果 M 与 N 无限靠近, 则 BK 与 BJ 便相等, 割线 MN 就变成了 M 点的切线。

“现在,”巴罗继续道,“弃去[在(ii)和(iii)中]所有不含 a 或 e 的项(因为根据曲线的性质,它们互相抵消掉了),弃去所有含 a 或 e 的高于一次幂的项或者它们乘在一起的项(因为和其余的项比较起来,它们的数值微不足道,是无限微小的),这样一来我们就得到 BJ 的两个值:

$$\frac{r^2 y^2 - 2r^2 ya}{x^2 - 2xe} \text{ 和 } x^2 - 2xe + y^2 - 2ya$$

令此两值相等,再弃去所有含 a 和 e 的高于一次幂的项,于是由上面的(i)式,我们有(因为 BK 和 BJ 相等):

$$r^2 y^2 - 2r^2 ya + 4x^3 e + 2x^2 ya + 2xy^2 e = x^4 + x^2 y^2 = r^2 y^2$$

因而

$$r^2 ya - x^2 ya = 2x^3 e + xy^2 e$$

若 $PA = t$, 则 $t : y = e : a$, 因此如在上一方程中把 e 写成 t , 把 a 写成 y , 则有

$$r^2 y^2 - x^2 y^2 = 2x^3 t + xy^2 t$$

即

$$t = \frac{r^2 y^2 - x^2 y^2}{2x^3 + xy^2}$$

它就是次切线的长度。”巴罗对于他确定 a 和 e 这两个量之比的一般方法以及对于笛卡儿和费尔马新发明的几何方法的威力,都缺乏完整的理解,否则他的方法就和现代求次切线长度的方法相差无几了。因为如果把方程写成

$$x^4 + x^2 y^2 - r^2 y^2 = 0$$

我们就有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3 + xy^2}{r^2 y - x^2 y}$$

因此次切线

$$\left(= \frac{y}{dy/dx} \right) \text{ 是 } \frac{r^2 y^2 - x^2 y^2}{2x^3 + xy^2}$$

巴罗用他的方法确定了许多曲线的次切线,其中包括下列几条:

$$1. x^3 + y^3 = r^3$$

$$2. x^3 + y^3 = rxy$$

$$3. y = (r - x) \tan \frac{\pi x}{2r}$$

虽然在我们以上所考察的几本著作中已经可以清楚地看到微积分的开端,但要把这个有力的数学工具的发明归功于上面提到的任何哪个人,那会是太过分的。值得怀疑的是,在他们当中是否有谁已经想到了变化率这个基本观念。这个观念是说,数学量是由连续运动产生的,就好像一条线是由一个以确定速度运动的点描出的一样。他们的兴趣都是在我们今天应当说是微积分的应用的那些方面——曲线切线的作法、曲线长度的求法和曲线所围面积的求法。但微积分的应用是一回事,而对它的基本原理加以严谨的解释则是另一回事,要在牛顿的任何前辈包括费尔马在内的著作中找到关于这种解释的任何启示,都是困难的。必须强调指出,除了巴罗以外,其他人连猜都没有猜到我们今天用“微分”和“积分”这些术语所表示的那些运算的互逆性质。牛顿从他前辈的《几何学讲义》里学到了很多,这本著作在微积分的发展中是一个重要的里程碑。有位现代的作者认为巴罗是无穷小分析的第一个发明人,这不是没有理由的。^①但牛顿达到了登峰造极的境地,我们现在要转过来讨论的就是他所起的作用。

牛顿的成就涉及范围很广,本章只考虑他在微积分(或者如他所说的流数术)方面的发现。这个发现是他对约翰·沃利斯的《无穷算术》(1656)仔细研究的结果。大家记得,17世纪初期数学家对于我们今天用 $\int_0^1 x^n dx$ 来表示的求和法是十分熟悉的,这曾被推广到 n 可以是分数的情形。沃利斯仿照卡佛来利的方法成功地解决了纵坐标由 $(1 - x^2)^n$ (n 是一正整数)给定的曲线的求积问题,他曾证明:

$$\int_0^1 (1 - x^2)^0 = 1$$

^① J. M. Child, *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow*, Preface, 1916.

$$\int_0^1 (1-x^2)^1 = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^2 = \frac{8}{15}$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^3 = \frac{48}{105}$$

在他尝试解决单位圆的求积问题时,曾遇到 $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx$ 这样的积分,他想用插值法算出它的值。因为他没有使用一般指数,所以没有算成功,但他借助一连串的复杂推理设法建立了下列关系:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{1}{\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdots}$$

沃利斯的著作对牛顿的影响很大。沃利斯曾经提出过一个普遍法则,能把方程 $y = x^n$ 所代表的曲线下的面积写成 $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ 的形式。

牛顿根据这些线索完成了曾经难倒过他的前辈的插值法,并且证明了,半径是 x 的圆的四分之一面积为:

$$x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{1}{8} \frac{x^5}{5} - \frac{1}{16} \frac{x^7}{7} - \frac{5}{128} \frac{x^9}{9}$$

这是研讨沃利斯著作的直接结果,并没有如通常所猜测的那样依靠过 $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ 的展开式。它依靠的完全是归纳法原理,归纳法原理在沃利斯的手中已经成了一个大大有力的工具。这从牛顿的坦率自白中可以很清楚地看出来:

“大约在我的数学生涯初期,那时我们杰出的同胞沃利斯博士的著作刚刚落入我的手里,他考虑到级数,用级数插入法求出了圆与双曲线的面积。换句话说,在一系列公底或公轴为 x , 纵坐标为 $(1-xx)^{\frac{0}{2}}, (1-xx)^{\frac{1}{2}}, (1-xx)^{\frac{2}{2}}, (1-xx)^{\frac{3}{2}}, \dots$ 的曲线所组成的序列中,如果能插入每隔一条曲线的面积,即插入 $x, x - \frac{1}{3}x^3, x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5, x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$, 等等,那我们就会得到中间那些曲线的面积,其中第一条曲线 $(1-xx)^{\frac{1}{2}}$ 是圆。”^①

① *The Epistola Posterior*, 牛顿致奥尔登堡转致莱布尼兹, 1676 年 10 月 24 日。

由此可见,导致牛顿发现其流数术之最后一步的,乃是沃利斯对求积问题的研究。这一方法的原理是在三本小册子中发展起来的: *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* (《无穷多项方程分析》), *Methodus Fluxionum* (《流数术》) 和 *De Quadratura Curvarum* (《曲线求积法》)。

《无穷多项方程分析》一书直到 1711 年才出版,但它早年在 1669 年就已写成,而且牛顿的许多同时代人都知道这本书,其中不少人曾竭力怂恿牛顿出版它。这本书一开头是这样一条规则:

“设有 $ax^{\frac{m}{n}} = y$, 则 $\frac{an}{m+n} \cdot x^{\frac{m+n}{n}} = ABCD$ 的面积。”这就是说,如果方程 $y = ax^{\frac{m}{n}}$ 代表曲线 ABD , 则由这一曲线与 x 轴所围之面积等于 $\frac{an}{m+n} \cdot x^{\frac{m+n}{n}}$ 。接着,在这条规则之后便是求两项或两项以上之和或差的“积分”,再接着就是 $y = \sqrt{aa + xx}$ 型的曲线面积的求法。

在这里,牛顿放弃了插值法,但当时他还没有应用二项式定理把 $\sqrt{aa + xx}$ 展开。他是用另一种办法,即把这个表达式开平方根,然后逐项“积分”。他实际上说的是:“若 $\sqrt{aa + xx} = y$, 则得到的根是

$$a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} + \cdots$$

$ABCD$ 的面积是

$$ax + \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} + \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7} + \cdots$$

这就是双曲线求积法。”

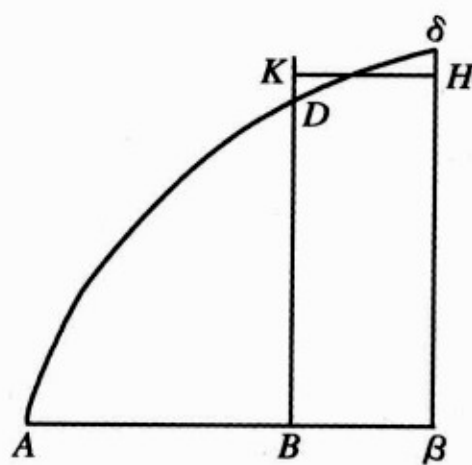


图 18

没有等到他建立起这些原理,他就证明了,所有这些看来不同的运算都可以归结为一个法则,就是积分。牛顿在证明时没有用到流数概念,更谈不上用到流数符号了。他还是坚持用他前辈的无穷小量,但这里有一个重要差别。在巴罗和费尔马用无限多个微小面积求和的办法得到结果的地方,牛顿的注意力却是针对如下一点:当横坐标 x 均匀增加时,曲线下的面积也增加,他的解释如下:

“在图中(图 18)令 $AB = x$, $BD = y$, 面积 $ABD = z$ 。再令 $B\beta$ 是一

小量 o ①, $BK = v$, 矩形 $B\beta HK$ (即 ov) 等于 $B\beta\delta D$ 小块。因此 $A\beta = x + o$, $A\delta\beta = z + ov$ 。假定了这些关系以后, 就可以用下面的方法掌握你所想要的 x 与 z 之间的任何关系, 并求出 y :

“任取 $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$ 。即 $\frac{4}{9}x^3 = z^2$ 。然后用 $x + o(A\beta)$ 代替 x , 用 $z + ov$ ($A\delta\beta$) 代替 z , 于是由曲线的性质有:

$$\frac{4}{9}(x + o)^3 = (z + ov)^2$$

$$\begin{aligned} \text{即} \quad \frac{4}{9}(x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3) \\ = z^2 + 2zov + o^2v^2 \end{aligned}$$

$$\text{由于} \quad \frac{4}{9}x^3 = z^2$$

$$\text{相减后得到,} \quad \frac{4}{3}x^2o + \frac{4}{3}xo^2 + \frac{4}{9}o^3 = 2zov + v^2o^2$$

$$\text{除以 } o \text{ 得到,} \quad \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}xo + \frac{4}{9}o^2 = 2zv + v^2o$$

今假定 $B\beta$ 无限减小, 以至等于零, 即假定 o 变为零, 于是 v 和 y 将相等, 而与 o 相乘的诸项等于零, 剩下的是

$$\frac{4}{9} \cdot 3x^2 = 2zv, \text{ 即 } \frac{2}{3}x^2 = zy = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y$$

$$\text{即} \quad x^{\frac{1}{2}} = y$$

因此反过来说, 若 $x^{\frac{1}{2}} = y$, 则 $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$ 。”推广这个结果的步骤是不难的。因为, 如果

$$z = \frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}}$$

则上述演算过程就导致 $ax^{\frac{m}{n}} = y$ 的结果。因此倒过来说, 如果 $ax^{\frac{m}{n}} = y$, 则有

$$\frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}} = z \text{ ②}$$

这个方法可以得出正确结果, 但我们不能轻易认为这件事就是它

① o 是字母, 不是零。

② 亦即面积 $z = \int y dx = \int ax^{\frac{m}{n}} dx = \frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}}$ 。

的正确性的证明。牛顿在这本书中没有试图去解释,他是根据什么原理把含 o 的诸项丢掉的。在这一点上,他比起费尔马和巴罗来进步很小。但是,他的处理方法充分澄清了这样一点:他已经掌握了微分与积分两种运算之间的关系。用他自己的话来说,他已经证明了他所发展起来的方法能够“直接地”用,也能“反过来”用。

《流数术》一书写成于 1671 年,但直到 1736 年才出版。牛顿在这本著作中改变了变量是由无穷小元素所构成的看法,而从运动学的观点来研究问题。

“这里,流数术赖以建立的主要原理,乃是取自理论力学中的一个非常简单的原理,这就是数学量,特别是外延量,它们都可以看成是由连续轨迹运动产生的,而且所有不管什么量,都可以认为是在同样方式之下产生的,至少经过类比和调整之后可以如此。因此在产生这些具有固定的、可确定的关系的量时,其相对速度一定有增减,因而也就可以作为一个问题提出如何去求它们。这里,本人是靠另一个同样清楚的原理来解决这个问题的,这就是假定一个量可以无限分割,或者可以(至少在理论上说)使之连续减小,直至它终于完全消失,达到可以把它们称之为零量(vanishing quantity)的程度,或者它们是无限小的,比任何一个指定的量都小。”^①这里我们看到,牛顿认为数学量是由点、线和面的连续运动产生的,而不是像他在早期著作中所说的那样,数学量是极小部分的集合。他写道:“线的画出乃至产生不是由于许多部分的并列,而是由于点的连续运动。”他把一个生长中的(即产生中的)量称为流量(fluent),其生长率叫做流量的流数(fluxion of the fluent);一个无限小的时间间隔叫做一个瞬(moment),并用字母 o 来表示。在这无限短的时间内流量所增加的无限小部分叫做流量的瞬。接着便引进了他的特有记号。“从今以后,我把那些我所考虑的逐渐无限增加的量,称为流量或流动量,并用最后几个字母 v, x, y 和 z 来表示它们,我不妨把它们和其他在方程中被看成是已知的和确定的量区别开来,而用开头几个字母 a, b, c 等来表示后者。至于每个流量由于产生它的运动而获得的增加速度(我不妨把它叫做流数,或直接称为速度或迅度),我将用带点的同样字母来表示它们,例如 $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}$ 和

^① F. Colson, *The Method of Fluxions and Infinite Series with its Application to the Geometry of Curve Lines*, Isaac Newton, translated, Pref. P. XI, 1736.

\dot{z} 。”然后牛顿就着手解决下列几个问题：

1. “诸流动量(流量)彼此之间的关系给出,试确定它们的流数之比。”亦即给定 $f(x)$, 试求 $f'(x)$ 或其微分。

2. “今提出一个方程,其中包含一些量的流数,试求这些量或流量彼此之间的关系。”这是 1. 的逆问题,相当于积分或解微分方程,牛顿把前者称为求积法(Method of Quadratures),把后者称为反切线法(Inverse Method of Tangents)。

对于第一个问题,牛顿发表了下面的命题:“如果流动量 x 和 y 之间的关系是

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

则可求得

$$\dot{x} : \dot{y} = 3y^2 - ax : 3x^2 - 2ax + ay \quad (\text{问题 1})$$

他的证明如下:

“诸流动量的瞬(也就是流动量在无限小的时间内所添加的无限小部分,它们是连续增加的)可与诸流动速度或增加速度同样看待。”

“因此,如果某个量 x 的瞬可表为它的迅度 \dot{x} 与一无穷小量的乘积(即可表为 $\dot{x}o$),则其他诸量 v, y, z 的瞬也可表为 $\dot{v}o, \dot{y}o, \dot{z}o$, 因为 $\dot{v}o, \dot{x}o, \dot{y}o$ 和 $\dot{z}o$ 彼此之间的关系也就是 $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}$ 和 \dot{z} 彼此之间的关系。”

“现在,既然 $\dot{x}o$ 和 $\dot{y}o$ 这些瞬都是流动量 x 和 y 的无穷小增量,经过几个无限小的时间间隔以后, x 和 y 这些量都有所增加,那么,由此可以推知 x 和 y 这些量在任一无限小的时间间隔后即变为 $x + \dot{x}o$ 和 $y + \dot{y}o$ 。因此,在一个方程——它在任何时候都只是表示诸流动量的关系——中, x 和 y 之间的关系也就表示 $x + \dot{x}o$ 和 $y + \dot{y}o$ 之间的关系。所以在同一个方程中我们可以用 $x + \dot{x}o$ 和 $y + \dot{y}o$ 这些量来代替 x 和 y 。因此若给定任一方程

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

之后,则用 $x + \dot{x}o$ 代替 x , 用 $y + \dot{y}o$ 代替 y , 便有:

$$\left. \begin{aligned} & x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3\dot{x}^2 oox + \dot{x}^3 o^3 \\ & - ax^2 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2 oo \\ & + axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}yoo \\ & - y^3 - 3y^2\dot{y}o - 3\dot{y}^2 ooy - \dot{y}^3 o^3 \end{aligned} \right\} = 0$$

现在由假定 $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, 所以这部分可以消去,把余下各项除以 o , 就剩下:

$$3\dot{x}x^2 + 3\dot{x}^2 ox + \dot{x}^3 oo - 2a\dot{x}x - a\dot{x}^2 o + a\dot{x}y + a\dot{y}x + a\dot{x}\dot{y}o \\ - 3\dot{y}oy - 3y^2\dot{y} - \dot{y}^3 oo = 0$$

但我们已假定 o 是无限微小, 它可以代表流动量的瞬, 所以与它相乘的诸项相对于其他诸项说来等于没有。因此我把它们丢掉, 而剩下

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0。$$

这里我们可以看到, 没有乘以 o 的诸项也和那些乘以一次以上的 o 的项一样, 总是等于零。而其余除以 o 的诸项总是具有根据上述规则所应有的形式。

牛顿的解说和现代对函数 $f(x, y)$ 取微分的方法之间的相似性, 是一目了然的。牛顿的结果可以写成:

$$\dot{x}(3x^2 - 2ax + ay) + \dot{y}(ax - 3y^2) = 0$$

因此, “流数之比”即 $\dot{y}:\dot{x}$ 变成

$$(3x^2 - 2ax + ay):(3y^2 - ax)$$

在今天, 我们会这样写:

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

取微分后

$$3x^2 - 2ax + ax \frac{dy}{dx} + ay - 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}$$

牛顿也曾指出, 他所提出的方法能用来解决另外两个问题, 即

3. 确定量的极大和极小。

4. 作曲线的切线。

他解决前一个问题的方法是依据费尔马以前用过的一种方法, 这就是: “当一个量等于它所能有的最大值或最小值的那一瞬间, 它既不向后流动, 也不向前流动。因为假如它向前流动亦即增加的话, 那就证明它比较小, 不久会更大。而假如它向后流动亦即减少的话, 就会发生相反的情况。因此要由问题 1 求出它的流数, 并假定它等于零。例如在方程

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

中, 试求 x 的最大值, 求出 x 和 y 的流数之比, 你就会有

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$$

再令 $\dot{x} = 0$, 便留下

$$-3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0, \text{ 即 } 3y^2 = ax$$

借助这一结果, 你可以从原始方程中消去 x 和 y 二者之一, 再由所得的方程你就可以确定另一个, 然后由 $-3y^2 + ax = 0$ 确定二者。”

牛顿对曲线的切线作法大约发现于 1672 年。在考灵斯写给奥尔登堡(致莱布尼兹)的一封注明日期是 1676 年 6 月 14 日的信中, 我们可以读到: “大约在 5 年前, 牛顿先生(在他 1672 年 12 月 10 日的信中)提出了一种对几何曲线作切线的方法, 该几何曲线可从一个表示纵坐标与基底增量关系的方程中得到。这里, 爵士的方法是一种特殊方法, 更确切地说, 是一种普遍方法的推论, 它毋需任何繁琐计算, 本身不仅可以推广用来作所有曲线的切线——不论这些曲线是几何曲线还是力学曲线, 也不论它们是与直线还是与其他曲线有关——而且可以推广用来解决其他各种难题, 例如求不规则图形的面积, 求不规则曲线的长度、重心, 等等。”

牛顿的方法是这样: “令 BD 是一铅垂线(图 19), 即纵坐标, 并令这纵坐标通过无穷小的空间运动到位置 bd , 因而它可以增加瞬 cd , 而 AB 增加瞬 Bb , Dc 与 Bb 相等并且平行。设将 Dd 延长, 直到它与 AB 相交于 T 点, 这条线将切曲线于 D 或 d 点, 而三角形 dcD 和 DBT 是相似三角形。”

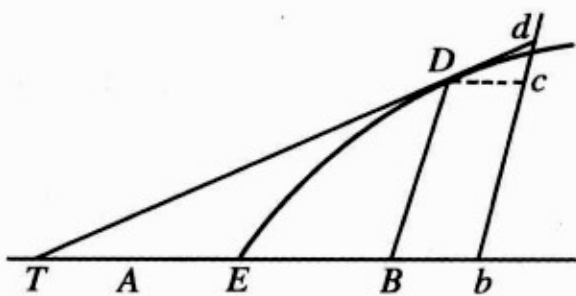


图 19

“因此我们有 $TB:BD = Dc$ (或 Bb): cd 。又因为 BD 与 AB 的关系可由确定曲线性质的方程看出, 所以根据问题 1 便可求出它们流数之间的关系。然后取 TB 与 BD 之比等于 AB 的流数与 BD 的流数之比, 则 TD 将切曲线于 D 点。”

“例: 令 $AB = x$, $BD = y$, 假设它们的关系满足:

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

于是它们流数之间的关系将满足:

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{y}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$$

所以

$$\dot{y}:\dot{x} = 3xx - 2ax + ay:3y^2 - ax = BD(y):BT$$

因此

$$BT = \frac{3y^3 - axy}{3x^2 - 2ax + ay}$$

所以给定 D 点后,便可得出 DB 和 AB,即 y 和 x , BT 的长度也就给定,由此即可确定切线 TD。”

要说牛顿在《流数术》中已经成功地消除了他早期著作里的模糊之处,那就过分夸大了。在《分析》中依旧出现有无穷小, o 仍然是时间的无穷小增量,而 x 和 y 的增量则分别是 $\dot{x}o$ 和 $\dot{y}o$ 。但他从未对此感到心安理得,他虽然宣称道“既然规定 o 是无限微小,那么,它就可以代表量的瞬,与它相乘的诸项对于其余诸项来说就等于没有”,但他已经清楚地知道这里免不了要处于进退两难的困境,所以他后来变得更加小心谨慎起来。他知道,在数学运算中,任何误差不管多小,都不能忽略不计(*errores quam minimi in rebus mathematicis non sunt contemnendi*),因此在以后一本著作《曲线求积法》中,他的目的是消除所有关于无穷小的痕迹,从而建立起他的没有无穷小的微积分。他在序言中认为没有什么必要把关于无穷小量的任何论点引进流数术中,因此他就把它们丢开,而代之以他的基本的和最终的比(*prime and ultimate ratios*)。他宣称道:“因为关于极微分割的假说是有些勉强的,所以那个方法不大能算是几何学方法,我倒愿意把下列命题的证明归结为一种新生的、渐近于零的量的第一个与最后一个和数,亦即归结为这些和与比的极限。因为这里所做的是与极微分割法中所做的是同一回事,所以,这些原理一旦证明以后,我们就可以更加有把握用它们了……因此,假如在以后我偶然把某些量看做是由分子组成的,或者把微小曲线当做直线的话,那就不要以为这是指不可分割的量,而是指渐近于零的可分割的量;不是指确定部分之比的和,而总是指这些和与比的极限。”

他确定 x^n 的流数即 $\frac{d(x^n)}{dx}$ (*Fluat quantitas x , uniformiter, et invenienda sit fluxio quantitatis x^n , x 的流量,同样可以求得 x^n 的流数*)的方法,就是一个例子,说明了这种新的研究途径。

“同时,由于流动而使 x 变成 $x + o$,量 x^n 变成 $(x + o)^n$,由无穷级数的方法,也就是变成

$$x^n + nox^{n-1} + \frac{1}{2}(nn - n)oox^{n-2} + \dots$$

因此 x 的增量是 o , x^n 的增量是

$$nox^{n-1} + \frac{1}{2}(nn - n)oox^{n-2} + \dots$$

这些量彼此之间的比是

$$1 : \left[nx^{n-1} + \frac{1}{2}(nn - n)oox^{n-2} + \dots \right]$$

现在令增量等于零,于是它们最后的比等于 $1 : nx^{n-1}$ 。所以量 x 的流数与量 x^n 的流数之比等于 $1 : nx^{n-1}$ 。”牛顿把这个比值叫做最终比(eorum ratio ultima),似乎这已使他感到满意,因为他写道:“现在,照这样用有限量来制定一种分析学,并研究这些有限量在新生的或渐近于零的情况下的基本比和最终比,是与古代的几何学一致的……我还乐意指出,在流数术中并无必要把无穷小的数字引进几何中来。”

但即使牛顿感到满意,他的读者却不满意,大多数读者都不知道他的意思是什么。吉伯特·克拉克这位颇有天赋的数学家反驳道:“因为你既然说 sit earum ultima differentia D(这是它们最终的差 D),这就已证明没有这样的东西存在,实际上,迄今为止所有的数学家一直认为,像不可分割的量或最终比这样的东西是不存在的,而你却说这是趋近于零的量的最终比。”牛顿曾预料到这个诘难,因为他写过:“有人反对说,趋近于零的量的最终比是不存在的,因为在这些量还没有等于零的时候,比值(比)并不是最终的,而当它们等于零的时候,又什么都没有了。但是,根据同样的论点,也可以认为一个物体在运动终了到达某一地点时最终速度是不存在的,因为当物体还没有到达这个地点时其速度不是最终速度,而当它已经到达时,又什么都没有了。但回答是不难的……这里有一个极限,它是在运动终了时所能达到但不能超过的速度。”因此,牛顿似乎已经在极限概念的周围徘徊,但是,我们很难看出他怎样可能获得一个我们今天会承认的极限概念。他似乎仍把极限值看做一个比值,而不是看做一个确定数。他在《原理》一书的第一个引理中说道:“若在任一有限时间内诸量连续趋于相等,而且在这段时间终了之前彼此之间较任何给定差都更为接近,那么它们最后将变成相等,对于诸量之比也是如此。”在最后的注释中,关于这点他又这样补充说:“因为在诸量等于零时得到的这些最终比并不是真的就是诸最终量的比,而是无穷递减的诸量之比所趋向的极限,它们总是收敛的,而且可以比任何给定差都近地接近于这些极限,但决不会超过,也不会实际上达到,除非到这些量消失于无穷中。……所谓渐近于零的诸量之最终比,不要理解成它们等于零以前的比,也不要

理解成它们等于零以后的比,而要理解成它们等于零的那个时候的比。”

然而,牛顿的“基本的和最终的比”还没有把令人迷惑的地方完全清除。关于这些小地方仍有一定的模糊之处,他在给牛津大学物理学教授约翰·开尔的一封信(1714年5月)中写道:“瞬是无穷小的部分。”但在《原理》第二版(1713)中,瞬已不再是微小部分,但它们是什么,则始终不清楚,下面一段话可以说明这点:“要当心,不能这样来看待有限分子。有限分子不是瞬,而是由瞬产生出来的量本身。我们要把它们想像成刚刚生长出来的有限量的元素。”我们马上就可看到,正是由于他不能明确定义他的比,这才使他遭到严厉的批评。牛顿竟难以把他的微积分建立在稳固的基础上,这一点并不算奇怪。事实上,补救这个缺陷乃是以后100多年数学家们所面临的主要问题之一。

现在我们从英国转向欧洲大陆。在德国,微积分的原理是由牛顿的杰出的同时代人葛特福莱·威尔赫姆·莱布尼兹发展起来的。莱布尼兹是一个以一切知识的追求为己任的人,数学只是他造诣很深的许多领域之一而已。他最为人们所不能忘怀的,是由于他自称为微积分的独立发明人——这在今天已为大多数人所公认,又是现代通行符号的首创者。

这里我们不打算参与居先权问题的不幸争论,这个争论对于一个诸多世纪以来的数学进展产生了相当令人遗憾的后果。^① 大多数有资格的评鉴家今天的看法是:牛顿和莱布尼兹互相独立地发明了微积分。看来也没有什么可靠的根据说明事情为什么不应当如此。如前所述,各国数学家一直徘徊于基本观念的周围达100多年。对于一个有能力前来配合并推广前人发现的人说来,当时的时机确是成熟了,至于这样的人同时会有两个出现,那也没有什么奇怪。同时产生了两个天才,比他们的同时代人更有远见,这在数学史上决不是罕见的。费尔马和笛卡儿就几乎是同时发现解析几何原理的,这只是读者容易看到的许多例子之一。

根据莱布尼兹的自述,他是在1674年发明微积分的。大家也许记得,牛顿在《求积法》中声称他“逐渐攻下流数术是在1665至1666

^① 关于这个争论的详尽记述,可参看 J. M. Child 译 *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*, 1920 年。

年”。然而,关于莱布尼兹的发明的最早介绍直到 10 年后才公诸于世,发表在 1684 年的 *Acta Eruditorum*(《博学者学报》)中。但有一点值得注意:莱布尼兹在此以前许多年就已掌握了主要原理。这一切事实上都是靠研究他的信件看出的。莱布尼兹 1673 年住在英国,很可能接触到一些熟悉《分析》一书的数学家,因为牛顿大约在这以前 4 年曾把该书内容写信告诉过他的许多朋友。或许,莱布尼兹也学习过墨卡托的双曲线求积法^①,这无疑会鼓起他对于无穷级数处理方法的兴趣。在他和皇家学会的秘书奥尔登堡通信的过程中,奥尔登堡曾指出牛顿已经有了某些重要发现,并且答应莱布尼兹的要求,告诉他进一步的消息。后来牛顿本人把一份关于他的方法的简要说明送给了奥尔登堡,请他转给莱布尼兹(1676 年 6 月 13 日)。莱布尼兹收到了这封信(1676 年 8 月 27 日),但还要求进一步说明,特别是关于牛顿处理无穷级数的方法。对此牛顿写了一封著名的复信 *Epistola Posterior*(《最后一封信》,1676 年 10 月 24 日),其中说明了他在级数展开中所有各种方法的细节。

在这些方法中,第一种方法的发现是由于牛顿研究了沃利斯曲线求积法所得的结果,这条曲线的纵坐标由 $(1-x^2)^n$ 所给定,这里 n 是一正整数。牛顿成功地把这些结果推广到 n 是分数的情形,从而得到了一些级数,可用来求其他曲线的面积,包括圆和双曲线的面积。这些研究终于导致二项式定理的发现,这首先是在 6 月 13 日的一封信中宣布的。这个定理给牛顿提供了一个简便得多的求积法,特别是在复杂的式子中,这样,他就抛弃了插值法和开根法,而改用二项式定理来展开。例如,为了求得纵坐标由 $y = \sqrt{a^2 + x^2}$ 给定的双曲线面积,他所要做的只是把表达式 $(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ 展开,得到下一级数:

$$a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$$

然后再对展开级数中相继各项应用他的规则。他用这种方法求出的面积是:

^① 见 *Logarithmotechnia*,《对数技术》,1668。该书载有墨卡托的著名级数 $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$,墨卡托把双曲线方程写成 $y = \frac{1}{(1+x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$,然后再逐项“积分”,从而证明了上一级数。

$$ax + \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} + \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7} + \dots$$

牛顿用各种不同的例子说明了这个方法的威力,在这封信快到末尾时,牛顿宣称他已有了第三种求曲线所围面积的方法。这种方法的基础就是流数术。在信的末尾几行,牛顿提到了“反切线法”,他说他已完全掌握这个方法,但他对此却小心翼翼地秘而不宣,以致即使像莱布尼兹这样一位机灵的数学家也很难说能不能从中推测出些什么来。

牛顿写道:“虽要避免说得过火的嫌疑,但是,关于切线的反问题目前已在我的掌握之中,而其他一些比这更困难的问题,我是利用一种具有两重性的方法解决的,一方面更加简洁,另一方面更加普遍。现在我认为需要用颠倒文字的办法把这些记下来,以免他人得到同样结果,在某些方面我不得不改变计划。”“颠倒文字”是指下面这样一句的文字:“一种方法是根据流量的方程得出它的流数,另一种方法仅仅是根据可能得出其合适量的某个未知量的级数,以及根据方程同类项的集合中得到所采用的级数的诸项。”这时决没有什么迹象表明牛顿曾给过莱布尼兹任何暗号。事实上,牛顿对他这位杰出的同时代人的态度是非常诚恳的,他在《原理》的第一版中毫不含糊地承认了莱布尼兹的天才。

牛顿的信使莱布尼兹深受感动,他在回信(1677年6月21日)中非常坦率地说明了自己的研究工作,特别是关于曲线的切线作法的研究,他把他的方法叫做纵坐标差分法(per differentias ordinatarum),认为这个方法比斯留萨斯的方法更普遍。十分清楚,莱布尼兹是非常熟悉巴罗在这个问题上所作的研究的。因为他的研究方法出人意料地和《几何学讲义》中“微分三角形”(differential triangle)的方法特别类似。莱布尼兹在这封回信中说:

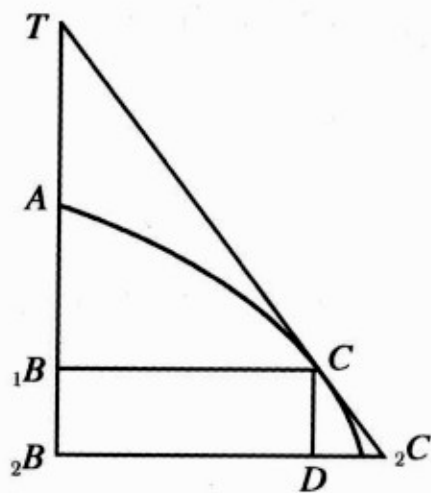


图 20

“我长期在用一种更普遍得多的方法来处理切线问题,这就是用纵坐标差分法。 T_1B (切线在坐标轴上的截距,从纵坐标量起)与纵坐标 $_1B_1C$ 之比等于 $_1CD$ (A_1B 和 A_2B 两个横坐标之差)与 D_2C ($_1B_1C$ 和 $_2B_2C$ 两个纵坐标之差)之比。由此显然可知,求切线无非就是求相应于已知的(相等的)横坐标之差的纵坐标差。”(图 20)

从莱布尼兹的一本没有出版的注明日期是 1676 年 11 月,题为 *Calculus Tangentium Differentialis* (《求差切线算法》)^① 的手稿中可以清楚地看出,在他收到牛顿的《后一封信》(1676 年 10 月 24 日)的时候,已经在建立新演算法方面获得了颇大进展。因为这部手稿中作了(未加证明)这样的陈述:

$$\overline{dx} = 1, \overline{dx^2} = 2x, \overline{dx^3} = 3x^2, \text{等等。}$$

$$\overline{d \frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2}, \overline{d \frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{x^3}, \overline{d \frac{1}{x^3}} = -\frac{3}{x^4}$$

$$\overline{d \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

由这些考虑可以推出

$$\overline{dx^e} = ex^{e-1}, \text{反之} \int \overline{x^e} = \frac{x^{e+1}}{e+1} \text{②}$$

一般说来,若有某个幂或根为 x^z , 则 dx^z 必等于 zx^{z-1} 。若 $z = \frac{1}{2}$, 即 x^z 是 \sqrt{x} , 则 $\overline{dx^2}$ 或 $\overline{d \sqrt{x}}$ 必等于 $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dz$ 或 $\frac{dz}{2\sqrt{x}}$ 。③ 接着, 令 $y = x^2$, 则

$$\overline{dy} = 2x\overline{dx} \text{ 或 } \frac{dy}{dx} = 2x。 \text{这一推理十分普遍, 而且与 } x \text{ 可能有的级数无}$$

关(Quæ ratiocinatio est generalis, nec refert quæ sit progressio ipsarum x)。④

在这段陈述中, 莱布尼兹取消了他所规定的(仿照巴罗的《几何学讲义》, 第 10 节)限制, 既不需要 dx 也不需要 dy 必须是常数。

后来一本手稿(1677 年 7 月 11 日)清楚地表达了微分的一个和式(或差式)的规则, 由此便不难推出乘积的微分系数的公式。商的微分规则也清楚地说明了: “兹令量值 ω 的公式即其方程等于 $\frac{\lambda}{\mu}$, 于是我可以

说, $d\omega$ 将等于 $\frac{\mu d\lambda - \lambda d\mu}{\mu^2}$ 。” 莱布尼兹在答复《后一封信》时, 曾说明了

① Gerhardt, C.I., *Der Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern*, 1899, 229 页。

② 隔了几行后莱布尼兹又把它写成了 $\int \overline{x^e dx} = \frac{x^{e+1}}{e+1}$ 。

③ 莱布尼兹写的是: Generaliter si sit aliqua potentia aut radix: x^z erit $\overline{dx^z} \Pi zx^{z-1}dx$. Si z sit $\frac{1}{2}$, seu x^z sit \sqrt{x} erit dx^2 seu hoc loco $d \sqrt{x} \Pi \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$ seu $\frac{dz}{2\sqrt{x}}$ 。

④ 无论 dx 或 dy 都不一定是常数, 对这件事的认识以及采用另一字母来表示被微分的函数, 乃是标志着一个开始, 标志着莱布尼兹微分学发展的真正开始。见 J. M. Child 译 *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*, 1919 年, 125 页。

怎样求下列方程所代表的曲线的切线：

$$a + by + cx + dxy + ey^2 + fx^2 + gy^2x + hyx^2 = 0$$

这就是要求出比值 $-\frac{\overline{dy}}{\overline{dx}}$ ，他证明了这个比值是

$$-\frac{c + dy + 2fx + gy^2 + 2hxy}{b + dx + 2ey + 2gxy + hx^2}$$

这是比 $-\frac{T_1B}{_1B_1C}$ (图 20)，由此便可确定次切线的长度。他也求得了

$d\sqrt{(a + bz + cz^2)}$ ，他的做法是令 $x = a + bz + cz^2$ ，于是 $d\sqrt{x} = -\frac{1}{\sqrt{x}}$ ，

$\frac{dz}{dx} = b + 2cz$ ，因此

$$d^2\sqrt{(a + bz + cz^2)} = -\frac{b + 2cz}{2dz\sqrt{(a + bz + cz^2)}}$$

这个结果是不正确的，不仅在符号上，而且在 dz 的位置上都不正确。

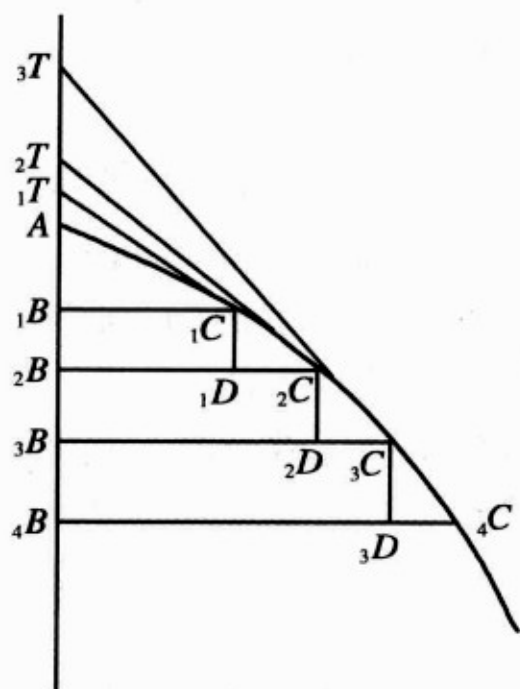


图 21

关于导致莱布尼兹发展其微积分的几个步骤，在他的另一部手稿中有着最详尽的说明，这部手稿是 *Elementa Calculi Novi prodifferentiis et summis, tangentibus et quadraturis, maximis et minimis, dimensionibus linearum, superficierum, solidorum, aliisque communem calculum transcendentibus*^①。这部手稿没有注明日期，但似乎在 1680 年以前就已写出。下面是这部手稿的大意。

令 CC (即 $_1C_2C_3C\cdots A$ ，见图 21) 为一曲线，其轴是 AB 和 BC ，这些轴可分别用 x 和 y 来表示。然后我们把 $_1C_1D, _2C_2D, _3C_3D, \cdots$ 这些横坐标之差称为 dx ，把垂线 $_1D_2C, _2D_3C, _3D_4C, \cdots$ 这些纵坐标之差称为 dy 。现若把这些相同的 dx 和 dy 都取为无限小，即当曲线上的点被认为是隔开一段距离，而这段距离小于

① 《差与和，切线与求积，极大与极小，线、面、体的度量以及超出通常微积分形式的其他等的新微积分原理》，Gerhardt, C.I., *Der Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern*, 32 页。

任何指定的长度时,也就是说,如果这些相同的 ${}_1D_2C, {}_2D_3C, {}_3D_4C, \dots$ 被看成是线段 BC 在沿 AB 下降时所连续增加的瞬时增量(*incrementa momentanea lineae BC*),那我们就可推知,连结这样两点(例如连 ${}_2C_1C$)并使其延长直至交曲线轴于 ${}_1T$ 点而成的直线,将是曲线的切线,而 ${}_1T_1B$ (纵坐标与切线之间沿曲线轴所取之截距)与纵坐标 ${}_1B_1C$ 之比将等于 ${}_1C_1D$ 与 ${}_1D_2C$ 之比,或者一般地说,如将 ${}_1T_1B$ 或 ${}_2T_2B$ 记为 t ,则 $t:y = dx:dy$ 。因此求出这一系列之差就求出了切线(*et itaque invenire differentias serierum est invenire tangentes*)。例如可以求出双曲线 $yx = a^2$ 的切线(图 22)。“因为 $dy = -\frac{aa}{xx}dx$ (马上我说明计算它的方法时,就会明白这个式子了),所以

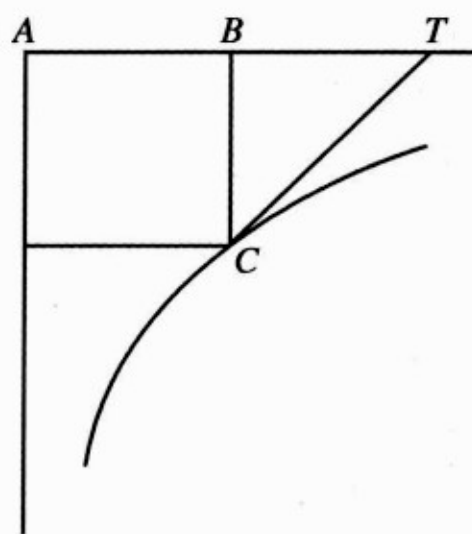


图 22

$$dx:dy \text{ 即 } t:y \text{ 将是 } = -xx:aa = -x:\frac{aa}{xx} = -x:y,$$

也就是说 $t = -x$, 即对双曲线来说 $BT = AB$, 但因为符号是负的, 所以 BT 必须取在 B 的远离 A 的一侧。”

“此外, 差就是和的反面(*reciprocae*), 因此纵坐标就是所有‘差’的和, 例如 ${}_4B_4C$ 是 ${}_3D_4C, {}_2D_3C$ 等一直到 A 点这些‘差’的和, 即使它们有无限多个, 这点也是对的。因此我把这件事记为 $\int dy = y$ (*Quod ita designo $\int dy$ aequ. y*)。此外, 我再用横坐标之差与纵坐标所围成的所有矩形之和来确定一个图形的面积, 例如用 ${}_1B_1D + {}_2B_2D + {}_3B_3D$, 等。至于那些小三角形, 像 ${}_1C_1D_2C, {}_2C_2D_3C$ 等, 因为它们相对于上述矩形说来是无穷小, 所以可以略去不计(*omitti possunt impune*), 因此我在我的微积分里就用 $\int ydx$ 来表示图形的面积, 即每个 y 与相应的 dx 所围成的所有矩形之和。所以在把全部的 dx 取得彼此相等的情况下, 那就得到卡佛来利的极微分割法。”

从以上可以清楚地看出, 莱布尼兹解说中的缺点并不比牛顿的少。两人都表现了类似的犹豫不决, 谁也没有把基本概念弄明白。莱布尼兹老是坚持他的差分法, 总是把微分说成“差”。无论牛顿还是莱

布尼兹都毫无顾忌地承认了这样一个模糊的原理:一个量可以变小到忽略不计的程度,牛顿后来虽然放弃了这个看法,但莱布尼兹似乎没有感到什么怀疑,一直认为可以让一个量的数值缩小到比任何指定的量(*quantitates inassignabiles*)都小,而它们之比仍然保持和两个有限量的比相同,即和纵坐标与次切线的比相同。至于怎样可以跨过从有限到无穷小量之间的鸿沟,则始终没有什么提示,在没有极限概念的情况下,这是很难办到的。虽然如此,莱布尼兹所用的方法却能导致正确结果,对他来说,这就是充分的根据了。他在 1684 年的论文中,把取微分(即求他的“差分”的过程)看成一个基本运算。由他对乘积取微分的规则,他轻易就得到了对一个变数的任意整数次幂取微分的规则,如前所述,他假定这个规则对于非整数次幂也成立。从一篇论文的题目就可以看出他心里是这样想的,这篇论文的题目是 *Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus* (《求极大、极小和切线的新方法,也能用于分数和无理量的情形以及非寻常类型的有关计算》)。和牛顿一样,莱布尼兹也已看出求“差”与求“和”即微分与积分这两种运算彼此相反的性质,所以他由 x^n 的微分法则导出了相应的积分法则。正如上述论文的题目所表明的,莱布尼兹研究过确定切线的问题,同时也研究过极大与极小的问题。这些方法对求积问题的应用则是发表在 1686 年的《博学者学报》中。

毫无疑问,莱布尼兹在创造他的微积分时甚至比牛顿更不注意严格的逻辑性与严密性。他是不明朗的,在其解说中甚至前后不一致。但是,用精巧的符号来表达微积分的功绩则应归之于他。在对微积分的发展有过许多贡献的所有作者当中,似乎只有少数人知道使用一种好记法是极端重要的。试回顾一下,假如微积分仍然停留在其初创者所用过的那些粗糙的不完整的记法上,那它就决不可能成为如此有力的工具,这几乎是毋庸置疑的。看来莱布尼兹一开始就认识到了这一点。我们曾看到,他是用符号“ \bar{d} ”来表示他的差分(即“差”), $\bar{d}x$ est differentia inter duas x proximas($\bar{d}x$ 是两个相邻的 x 之间的差),但以后又认为 $\bar{d}x$ 是常数(“等差的”),这是一个不必要的限制。后来他放弃了这个限制,在 1684 年的论文中引入了符号 dy 与 dx 以表示曲线上两个相邻点的纵坐标之差与横坐标之差,但是如前所述,他从来没有把他的意思说得十分清楚。在 1686 年的《博学者学报》中出现了符号

$\int x$ (后来变成了 $\int x dx$) 表示和数。但是正如我们在前面所指出的, 他已经清楚地说明了, 由各个 y 及相应的 dx 所围成的全部矩形之和可以写成 $\int y dx$ 。他在 1675 年 10 月 29 日的一封信件中说: “把 *omn* 写成 \int 是有用的, 亦即 $\int l = omn \cdot l$, 也就是所有 l 的总和 (Utile irit scribi \int Pro omnia, ut $\int l$ pro $omn \cdot l$, id est summa ipsorum l)。”在《皇家学会会报》(XXIX, 294 ~ 307 页) 中有这样一句话: “从 1687 年以来, 莱布尼兹先生就一直使用符号 $\int x, \int y, \int z$ 来表示纵坐标之和。”

同上文比较起来, 牛顿所采用的一套符号是粗糙的、不精巧的, 正因为这个缘故, 莱布尼兹的记法一直沿用到今天。当然也不是没有反对的人。拉普森这个过分崇拜牛顿的声名的人, 就认为莱布尼兹的符号是不大恰当、比较麻烦的。这个批评意见今天很难找到人支持了, 但它却使莱布尼兹的一套符号在英国迟用了一个多世纪。

事实上, 正是莱布尼兹记法的优越性对于微积分在欧洲大陆的普及作出了很大贡献。莱布尼兹认为他的微积分乃是得到这样一些结果的方法, 如果不用这种方法, 那就需要花费更多的时间和精力。按照他的意见, 在明确制定出来的计算程序中, 正确地应用计算规则不可能只是导致基础不可靠的正确结果。正是微积分的这个特点, 使数学家看到了他们手里这个新工具的巨大威力。

作为一个数学家, 莱布尼兹的声望虽然由于他对微积分的发明而大大提高, 但他对其他数学部门也作了重大贡献。他显示出相当高的分析技巧。他发展了组合分析这门学科, 对新发明的解析几何也提出了改进意见, 我们记得, 笛卡儿曾故意把解析几何的内容说得令人费解。横坐标、纵坐标等术语的引进不过是他所提出的改进意见中的一小部分而已。

尽管人们热烈地欢迎这种新方法, 但牛顿和莱布尼兹两人对基本原理的解说仍是含糊不清的。他们都同样显得犹豫不定, 对所用运算的合理与否同样显得漠不关心。其后果是, 新方法遭遇到不少人的批评。在英国, 最大胆的攻击来自一个不懂数学的人乔治·贝克莱 (1685 ~ 1753), 是克洛纳的大主教。他嘲笑牛顿所一直信奉的“基本的和最终的比”这个概念, 认为渐近于零的两项之间不可能设想有有限

的比。“这些流数是什么？”这位博学的神学家问道，“是渐近于零的增量的速度。那么这些相同的渐近于零的增量又是什么呢？它们既不是有限量，也不是无穷小量，可也不是虚无。难道可以把它们称为死去的量的幽灵吗？”贝克莱的批评是正确的，但它决不是建设性的，除非使用连续和极限的正确观念——它们直到将近两个世纪以后才形成起来，否则我们就不能说微积分是建立在牢固基础上的建筑物。莱布尼兹微积分的遭遇稍微好一点。荷兰的贝纳得·纽汶提一直认为，和巴罗或牛顿比较起来，莱布尼兹对这些无穷小量与零的区别如何的问题不可能作出更多的解释，他坚决反对不顾这一点就付诸实用。莱布尼兹对此除了说它能导致正确的结果之外，无法给出令人满意的回答，而认为过分的小心很可能使我们失去这项发明的果实。幸运的是，大约在这时出现了两个人，他们了解新微积分的威力和适应性，这就是詹姆士·伯努利(1654 ~ 1705)和约翰·伯努利(1667 ~ 1748)两兄弟。他们的努力，使得微积分成了欧洲大陆人们普遍了解的知识。但在英国进步很小，在一定程度上说，关于居先权的不幸争论是造成这种情况的原因。英国人无疑是由于过分的民族自尊心而勉强抛弃了他们同胞伯努利的方法和记法。此外再加上这样一个事实：在牛顿的伟大著作《原理》中，是以几何形式提出结果的，这使得数学家们以为微积分并非真正必要的。沃利斯在晚年曾竭力想给牛顿的方法以应有的评价。他诉苦道：“牛顿的流数法在荷兰乃是通过莱布尼兹‘差分法’的名字而受到热烈欢迎的。”牛顿的声誉还有两个忠实保卫者，这就是布鲁克·泰勒(1685 ~ 1731)和柯林·马克劳林(1698 ~ 1746)。后者在1742年的《流数论》一书中对贝克莱的批评提出了有力的反驳。但是直到19世纪，英国的数学家才开始接受莱布尼兹的“自然神论”(deism)，以代替牛顿的“老糊涂”(dot-age)。

虽然如此，微积分还是在数学领域中开辟了一个新纪元。很少有其他发明能如此硕果累累。在以后50多年的时间里，新方法吸引了数学家的全部活力，甚至把费尔马和笛卡儿重要的分析方法都排斥在外了。

牛顿的声誉并不只是靠他在微积分的确立中所起的作用，虽然仅仅这一点就足以使他置身于各个时期最伟大的数学家的行列了。下一章我们将考察另外两个和牛顿的名字联在一起的发现，即万有引力原理和二项式定理。

第十一章 二项式定理和《自然哲学的数学原理》

二项式定理 在 1664 年和 1665 年间,也就是由于瘟疫流行而迫使牛顿从剑桥躲开的前夕,牛顿就开始了导致发现二项式定理的研究。在牛顿所出版的著作中始终没有关于这个著名定理的说明,更不用说关于它的证明了。第一次提到它是在 1676 年 6 月 13 日他写给奥尔登堡转给莱布尼兹的一封信中。莱布尼兹曾向奥尔登堡索取一些关于牛顿处理无穷级数的消息。在这封信中,牛顿写道:“由于我在若干年前曾经搞过这个定理,所以我把 I 想起的一些东西寄给你,以便满足他(莱布尼兹)的愿望,至少部分地满足他的愿望。”

他宣称,用除法可以把分数化成无穷级数,用开方法可以把不尽根化成无穷级数。“但用下面的定理可以大大简化开方法:

$$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} \cdot AQ + \frac{m-n}{2n} \cdot BQ + \frac{m-2n}{3n} \cdot CQ + \frac{m-3n}{4n} \cdot DQ + \dots$$

这里,第二项中的 A 代表第一项 $P^{\frac{m}{n}}$,第三项中的 B 代表第二项 $\left(\frac{m}{n}\right) \cdot AQ$,依此类推; $P + PQ$ 则表示这样一个量,它的根或任何次幂,即任何次方根,乃是我们所求的, P 是这个量的第一项, Q 是被第一项除过的诸项之余项, $\frac{m}{n}$ 是 $(P + PQ)$ 的幂指数,它可以是整数或分数,正数或负数。”信中没有给出任何证明,但在稍后一点地方有验证这个定理的方法。此外要注意,牛顿只处理了二项式的自乘幂是分数或负数的情况,即展成无穷级数的情况。当 n 是整数时, $(x + y)^n$ 的直接展开式是人们早就知道了的,但它们是用直接相乘的办法得到的,没有

应用任何法则。最近乎一种法则的,是由帕斯卡所提出,他借助著名的帕斯卡三角形说明了怎样立即把展开式的各项写下来。

因而牛顿就必须确定非正整数指数的意义。我们记得沃利斯曾写过“ $\frac{1}{a^2}$ 相当于指数为 -2 ”,“ \sqrt{a} 相当于指数为 $\frac{1}{2}$ ”,但他从来没有真正使用过负指数或分数指数。牛顿却立即用下面的方法确定了它们的地位:

“正如分析学家习惯于把 aa, aaa, \dots 写成 a^2, a^3, \dots 一样,在我,则把 $\sqrt{a}, \sqrt{a^3}, \sqrt{c \cdot a^5}, \dots$ 写成 $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{3}{2}}, a^{\frac{5}{2}}, \dots$, 把 $\frac{1}{a}, \frac{1}{aa}, \frac{1}{a^3},$ 写成 a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} 。此外,我又把 $\frac{aa}{\sqrt{c \cdot a^3 + bbx}}$ 写成 $aa(a^3 + bbx)^{-\frac{1}{2}}$, 把 $\frac{aab}{\sqrt{c \cdot a^3 + bbx} \times a^3 + bbx}$ 写成 $aab(a^3 + bbx)^{-\frac{3}{2}}$ 。”牛顿确立了这些指数的意义之后,马上就用如下几个例子说明了这一定理的应用:

$$(d + e)^5 = d^5 + 5d^4e + 10d^3e^2 + 10d^2e^3 + 5de^4 + e^5$$

$$\frac{1}{d + e} = (d + e)^{-1} = \frac{1}{d} - \frac{e}{d^2} + \frac{e^2}{d^3} - \frac{e^3}{d^4} + \dots$$

$$(d + e)^{-3} = \frac{1}{d^3} - \frac{3e}{d^4} + \frac{6e^2}{d^5} - \frac{10e^3}{d^6} + \dots$$

$$N(d + e)^{-\frac{1}{3}} = N\left(\frac{1}{d^3} - \frac{e}{3d^{\frac{4}{3}}} + \frac{2e^2}{9d^{\frac{7}{3}}} - \frac{14e^3}{81d^{\frac{10}{3}}} + \dots\right)$$

接着牛顿还用同样的法则方便地得到了幂、用幂或根式作除数的商,以及数的开高次方根的表达式。

莱布尼兹在写信给奥尔登堡时(1676年8月27日),对牛顿的工作表示钦佩。他还说,他看不出牛顿是怎样想到这个定理的,因此要求进一步的说明。牛顿对此回答(1676年10月24日)说,他即将发表莱布尼兹想得到的内容,即在6月11日的一封信的开头他所提出的这个定理的根据。在这封著名的信件(《后一封信》)中,牛顿叙述了导致发现二项式定理的步骤。

牛顿曾用沃利斯在《无穷算术》一书中试图确定曲线形面积的方法(命题118~121),研究了求积问题中的级数。大家记得,沃利斯曾算出今天应写成 $\int (1 - x^2)^n dx$ (n 是一正整数)的求积问题,但他无法

推广到 n 是分数,例如是 $\frac{1}{2}$ 的情形。牛顿谈到:在一系列公底或公轴为 x ,并且纵坐标分别是 $(1-xx)^{\frac{0}{2}}, (1-xx)^{\frac{1}{2}}, (1-xx)^{\frac{2}{2}}, (1-xx)^{\frac{3}{2}}, (1-xx)^{\frac{4}{2}}, (1-xx)^{\frac{5}{2}}, (1-xx)^{\frac{6}{2}}, (1-xx)^{\frac{7}{2}}, (1-xx)^{\frac{8}{2}}, \dots$ 的曲线中,第一个,第三个,第五个,第七个, \dots 曲线所围之面积分别是

$$\frac{1}{1}x$$

$$\frac{1}{1}x + \frac{1}{-3}x^3$$

$$\frac{1}{1}x + \frac{2}{-3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$$

$$\frac{1}{1}x + \frac{3}{-3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{-7}x^7$$

$$\frac{1}{1}x + \frac{4}{-3}x^3 + \frac{6}{5}x^5 + \frac{4}{-7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$$

他继续说,因此我们要是能在这些面积中第一个与第二个值之间插入一个中间的值,那就会得到我们所要求的级数,即代表曲线 $(1-xx)^{\frac{1}{2}}$ (即圆)所围面积的级数。

牛顿仔细研究了上述几个级数,从而注意到其中每个级数的第一项都是 x ,而从第一项开始的相继各项,不管指数值如何,其分母乃是 $1, -3, 5, -7, 9$ 等数,所以只要求出这些项的分子的系数就行了。他还注意到,在沃利斯的每个级数中,第二项的分子(即 $0, 1, 2, 3, 4, \dots$)构成一个次序明显的级数,因此很容易看出在任意两个相继的沃利斯级数之间插入一个级数的头两项应当是:

$$\text{属于第一与第二者之间的级数的是 } x + \frac{\frac{1}{2}}{-3}x^3;$$

$$\text{属于第二与第三者之间的级数的是 } x + \frac{\frac{3}{2}}{-3}x^3;$$

$$\text{属于第三与第四者之间的级数的是 } x + \frac{\frac{5}{2}}{-3}x^3, \text{ 等等。}$$

其中第一个应给出一图形的面积,此图形的纵坐标可写成 $(1-xx)^{\frac{1}{2}}$,也就是圆。

在牛顿企图发现一个法则,用来求得被插入级数其余各项的分子时,他看出在几个已知级数中,这些分子的系数构成这样一些数字:它们相继是11的乘幂,亦即 11^0 或1, 11^1 或11, 11^2 或121, 11^3 或1331,等等。虽然这个发现是巧妙的,但当幂次是分数时,它对他就不能有所帮助了。但对级数的进一步研究导致这样一个法则的发现:利用这个法则,可以从每个级数第二项的分子导出所求的数,因为他看到,若令 m 表示该项,则在每一情形下用如下各项连乘便能相继得到各个分子:

$$\frac{m-0}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \dots$$

例如考虑一个级数,它表示一纵坐标为 $(1-x^2)^4$ 的曲线所围的面积。

前已确定,头两项是 $x + \frac{4}{-3}x^3$,因此 $m=4$,所以相继各项的分子是:

$$\frac{4-0}{1} \times \frac{4-1}{2}, \text{即第三项的分子是 } 6;$$

$$\frac{4-0}{1} \times \frac{4-1}{2} \times \frac{4-2}{3}, \text{即第四项的分子是 } 4;$$

$$\frac{4-0}{1} \times \frac{4-1}{2} \times \frac{4-2}{3} \times \frac{4-3}{4}, \text{即第五项的分子是 } 1;$$

$$\frac{4-0}{1} \times \frac{4-1}{2} \times \frac{4-2}{3} \times \frac{4-3}{4} \times \frac{4-4}{5}, \text{即第六项为 } 0,$$

级数到这里中止了。因此,对于表示纵坐标为 $(1-x^2)^4$ 的曲线下方面积的级数,我们得到级数

$$x + \frac{4}{-3}x^3 + \frac{6}{5}x^5 + \frac{4}{-7}x^7 + \frac{x^9}{9}$$

即

$$x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{6}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \frac{x^9}{9}$$

这件工作完成后,牛顿便应用他的法则来求所插入几个级数的其余各项,即

$$\int (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\int (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$\int (1-x^2)^{\frac{5}{2}} dx$$

...

这里是从第一级数开始。“因此我用这个法则来插入级数。又因为对

于圆来说,第二项是 $\frac{1}{2}x^3$,所以我就令 $m = \frac{1}{2}$ 。”这样他就得到:

第三项的分子是 $\frac{\frac{1}{2}-0}{1} \times \frac{\frac{1}{2}-1}{2}$,即 $-\frac{1}{8}$;

第四项的分子是 $\frac{\frac{1}{2}-0}{1} \times \frac{\frac{1}{2}-1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}-2}{3}$,即 $\frac{1}{16}$;

第五项的分子是 $\frac{\frac{1}{2}-0}{1} \times \frac{\frac{1}{2}-1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}-2}{3} \times \frac{\frac{1}{2}-3}{4}$,即 $-\frac{5}{128}$,

如此等等,以至无穷。对于圆的四分之一面积,他得到的级数是

$$x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{-1}{5}x^5 + \frac{1}{16}x^7 + \frac{-5}{9}x^9 + \dots$$

即

$$x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 - \frac{5}{1152}x^9 + \dots$$

牛顿按照这样的步骤继续证明了用同样方法可以给出纵坐标由 $(1+x^2)^0, (1+x^2)^{\frac{1}{2}}, (1+x^2)^{\frac{3}{2}}, \dots$ 表示的诸曲线所围之面积,并且因此得到了双曲线所围面积的表示式,该双曲线的坐标由 $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ 给定。

牛顿下一步是考察用同样方法能不能得到插入在下列级数之间的级数诸项:

$$(1-xx)^{\frac{0}{2}}, (1-xx)^{\frac{2}{2}}, (1-xx)^{\frac{4}{2}}, (1-xx)^{\frac{6}{2}}, (1-xx)^{\frac{8}{2}}$$

即

$$1, 1-x^2, 1-2x^2+x^4, 1-3x^2+3x^4-x^6, 1-4x^2+6x^4-4x^6+x^8$$

就像用这种方法可以确定代表它们所围面积的级数诸项一样。换句话说,他所要寻找的是这样一个法则,用它可以得到下列级数诸项:

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}, (1-x^2)^{\frac{3}{2}}, (1-x^2)^{\frac{5}{2}}, \dots$$

由于对几个 $(1-x^2)^n$ 的级数的研究,这里 n 都是不同的正整数值,使他知道上述级数中各项的分母 $1, -3, 5, -7, 9$ 等数可以用 $1, -1, 1, -1, 1$ 等数来代替,因而剩下的工作只是去确定数字系数。他看出从第二项以后,这些系数可以连乘下列诸项而得到:

$$m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \dots$$

这里 m 仍旧是第二项的数字系数。例如在 $(1+x^2)^5$ 的展开式中, m 是 5, 因此我们得到

第三项的为 $5 \times \frac{5-1}{2}$, 即 10;

第四项的为 $5 \times \frac{5-1}{2} \times \frac{5-2}{3}$, 即 10;

第五项的为 $5 \times \frac{5-1}{2} \times \frac{5-2}{3} \times \frac{5-3}{4}$, 即 5;

第六项的为 $5 \times \frac{5-1}{2} \times \frac{5-2}{3} \times \frac{5-3}{4} \times \frac{5-4}{5}$, 即 1,

以后各项都等于零。如用这个法则来确定 $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ 的展开式中的各项时, 则须注意第二项的系数是 $\frac{1}{2}$, 所以令 $m = \frac{1}{2}$ 后, 我们得到:

第三项的系数是 $\frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}-1}{2}$, 即 $-\frac{1}{8}$,

第四项的系数是 $\frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}-1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}-2}{3}$, 即 $\frac{1}{16}$,

等等。依此继续进行, 牛顿得到他所要求的级数如下:

$$1 + \frac{\frac{1}{2}x^2}{-1} + \frac{-\frac{1}{8}x^4}{1} + \frac{\frac{1}{16}x^6}{-1} + \frac{-\frac{5}{128}x^8}{1} + \dots$$

即 $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \dots$

利用同样方法, 他证明了 $(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$ 的展开式中的各项是:

$$1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{81}x^6 - \dots$$

为了验证这些结论, 牛顿将 $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ 的级数自乘, 结果发现乘积是 $(1-x^2)$; 再将 $(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$ 的级数立方, 也得到同样的结果。(Nam ut probarem has operationes, multiplicavi

$$1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 + \dots$$

in se, et factum est $1 - xx$. Ataque ita

$$1 - \frac{1}{3}xx - \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{81}x^6 - \dots$$

bis in se ductum produxit $1 - xx$.) 他更进一步地把 $(1 - x^2)$ 开平方以检验前一级数,“比较算术化地”得到了同样的结果。

牛顿就是这样逐渐发现二项式定理的。值得指出的是,牛顿是在尝试用无穷级数来开方和作除法的时候得到这一发现的。“因此,在我知道开方的方法以前,就已经知道用我在先前一封信的开头所规定的法则,一般地把不尽根化为无穷级数。”^① 牛顿在建立了二项式定理以后,马上就抛弃了他以前用于求积的插值法,而把这个定理当做确定曲线下方面积的一个最简便最直接的方法来使用,他在这封信中就提出了许多例子。他在上述信件中宣称道:“我发现这个定理后,就完全不考虑级数的插值法了,只是把这些运算当做一种比较确实的根据来使用。”

例如,为了确定双曲线 $y = \sqrt{a^2 + x^2}$ 所围之面积,他把表达式 $(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ 展开如下:

$$\begin{aligned} y &= a \left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= a \left(1 + \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^4}{8a^4} + \frac{x^6}{16a^6} - \frac{5x^8}{128a^8} + \cdots \right) \\ &= a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} + \cdots \end{aligned}$$

因此,根据沃利斯的法则,这个曲线所围面积可由

$$ax + \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} + \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7} + \cdots$$

给出。显然,牛顿把这个定理只是看成一种能迅速求积的方法。奇怪的是,这个定理在他所发表的著作中竟未取得比较显著的地位。按照惠更斯的说法[*Œuvres* (《著作》), VI, 372 页],大约在上述信件发出三四年后,詹姆士·格雷果里可能独立地发现过这个定理。

在我们转而探讨牛顿最伟大的论著《自然哲学的数学原理》(简称《原理》)之前,必须谈谈他在数学方面一些不大有名的贡献。1707 年首次出版的 *Arithmetica Universalis* (《算术大全》)一书,其内容主要是他

^① “Sic itaque innotuit mihi generalis Reductio Radicalium in infinitas Series per Regulam quam posui initio Epistolæ prioris antequam scirem Extractiones Radicum.” (*Epistola Posterior*) 因此牛顿把二项式定理的发现放在开方根的方法的发现之前。

在纯粹代数上的一些发现。这本书概括了他在剑桥任教时期所作讲演的要点,其中可以找到许多关于方程论的新奇而且重要的研究,包括发现虚根的法则和下列陈述:若方程各项的系数是实数,则成对出现虚根。他检查了笛卡儿的符号规则,说明了它的使用范围。在这本书中,牛顿有专门章节讨论了借助于螺线或椭圆求解三次方程的几何方法。借助两个二次曲线的交点来解三次方程的方法是人们早就知道和懂得的,但是牛顿的处理更为详尽。

Enumeratio Linearum Tertii Ordinis(《三次曲线计算》,1704)包括许多关于曲线论的重要定理。其中牛顿用笛卡儿的方法研究了三次曲线的性质,并对这些曲线作了精细的分类,列举了不少于 72 种不同的类型。有许多定理不加证明就给出了,其中许多证明的发现乃是下个世纪一些最伟大的数学家所致力从事的工作。这一论著最先是作为 1704 年出版的《光学》一书的附录发表的。

《解析几何》一书是根据郝斯莱的三件手稿编汇而成,郝斯莱在 1779 年用上述标题出版了这些手稿。这本书中包括有牛顿关于曲率问题的研究,他用曲线上两点的法线当两点趋近时的极限交点来定义曲率。这个交点就是曲率中心。牛顿对数学最重要的贡献之一出现在上面提到过的一封信件(1676 年 6 月 13 日)中,他在这封信里提出了一个解三次方程 $y^3 - 2y - 5 = 0$ 的巧妙方法,证明了这个方程可被 $y = 2.094\ 551\ 48$ 一值所满足。

尽管所有这些贡献都是重要的,但是他的盛誉则主要来自于《自然哲学的数学原理》一书,这就是我们现在就要谈到的一本著作。

《自然哲学的数学原理》就在因瘟疫流行而离开剑桥的那段时期,牛顿已开始探索关于重力的性质,结果在 1687 年出版了他的不朽著作《自然哲学的数学原理》。自从开普勒发表他的行星运动定律以来,人们曾经作过许多尝试,企图依靠地球上的力学原理来说明行星的行为。我们记得,笛卡儿曾试图用似是而非的原子涡动说来解释行星运动。他认为太阳系是一个巨大的“原始物质”的涡旋,地球和行星在其中无依无靠地围绕着太阳旋转,就好像物体被河里的涡流或旋涡带动而旋转一样。牛顿一开头似乎就确信笛卡儿所想像的太阳系在动力学上是没有根据的,因而不能加以接受。他在试图发展一个比较令人满意的理论时,把注意力转到了月球,认为使月球保持在其轨道

上的力可能与物体被拉向地心的力相同。“同年(1666),”他写道,“我开始思考达到月球轨道的重力……因此我把使月球保持在其轨道上所需的力,同地球表面上的重力相比较,发现它们相当一致。”

当然可以假定如果地球重力的牵引力量确实达到了月球,那么经过这段距离之后它会显著减小。这样假定是自然的。这一减小的程度显然无法通过观测看出来。但作如下的假定未尝不为合理:月球是由于一种吸引力而保持在其轨道上,这种吸引力就类似于使行星保持在他们围绕太阳的路线上的力一样。牛顿根据对行星周期和行星到太阳的距离的考察,由开普勒定律推知,这个力必须和距离的平方成反比。他在1686年7月14日给哈雷写道:“如果没有你的复比例,我不能肯定大约在20年前就可根据开普勒的定理把它推断出来了。”^①

因此,牛顿便着手进行这样的工作,即根据月球受地球的重力牵引并且这个牵引力遵从反平方定律的假说来计算月球向地球下降的速度。为此他需要知道月球到地球距离的准确数值以及月球旋转的平均周期,前者被认为是 $60r$, r 为地球的半径,后者的平均值是27天7小时43分11.5秒,即非常接近于39 343分。在牛顿时代,地球表面赤道处一度的长度公认数值是60英里。这说明地球的周长应为 60×360 英里,因而月球轨道的长度是 $60 \times 60 \times 360$

英里,它的直径是 $\frac{60 \times 60 \times 360}{\pi}$ 英里。因为月球在39 343分内围绕地球运行一整周,所以它的速度是每分钟 $\frac{60 \times 60 \times 360 \times 5\,280}{39\,343}$ 英尺。

即每分钟173 930英尺。这就是说,如果月球在一分钟内从 P 移动到 Q (图23),则弧 PQ 是173 390英尺。且在这一分钟内,月球已向地球下降了一段等于 $Q'Q$ 或 PN 的距离。现在,由初等几何可知

$$PN \cdot NP' = NQ^2$$

它可以近似地写成

$$PN \cdot PP' = (\text{弧 } PQ)^2$$

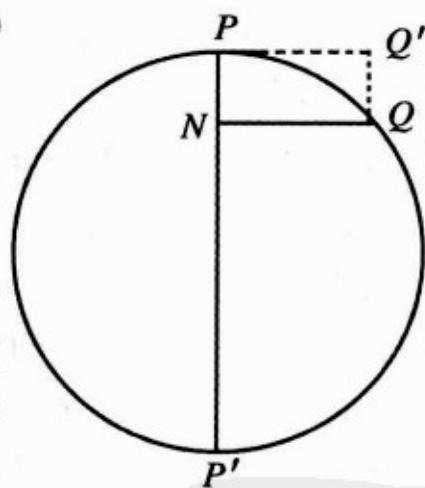


图 23

^① 见伦敦皇家学会图书馆中的一封信。

因而 $PN = \frac{PQ^2}{PP'} = \frac{173\,930 \times 173\,930 \times \pi}{60 \times 60 \times 360 \times 5\,280}$ 英尺,

即 13.89 英尺。

现在,地球表面上一块石头在一分钟内下落的距离是 16×60^2 英尺。假定反平方定律成立,则地球在月球距离处的引力将不到 60^2 倍,所以这样远的一个物体将向地球中心下降 $\frac{1}{60^2} \times 16 \times 60^2$ 英尺,即 16 英尺。牛顿虽然宣称他发现这两个结果“相当”一致,但他并不感到满足,而把这个问题搁置了一段时期。

1682 年 6 月皇家学会的一次会议宣布,地球子午线上一度的长度已由 M. 皮卡尔在 1679 年作了新的测定。结果表明通常公认的 60 英里这一数值有着显著的误差,按照皮卡尔的测算,误差至少是 9.1 英里。这样一来,月球轨道就成为 $60 \times 69.1 \times 360$ 英里,它朝地球下降的速度则是每分钟

$$\frac{60 \times 69.1 \times 360 \times 5\,280\pi}{39\,343 \times 39\,343} \text{英尺}$$

即 16.01 英尺。这与地球表面一块石头下落的速度接近一致,从而证实了牛顿以前的推测,并使他确信,使月球保持在其轨道上的力和使石头落向地面的力相同,而且这个力按照它到地球中心距离的平方这一比例减小。所以牛顿又回过来研究行星的运动,就这样他发现了如下的定理:如果行星受到一吸引力的作用,这个吸引力遵从反平方定律,则行星将描出椭圆形轨道,吸引力的力心位于椭圆的焦点之一。^①

当时,行星运动的问题一直使当时某些最有才能的人煞费脑筋,特别是哈雷、惠更斯、胡克和雷恩。他们根据开普勒定律,已经猜测到有一种来自太阳的力存在,并且这个力按照它到太阳距离的平方成反比地变化,但要证明这样规律的力应给出椭圆轨道,却非他们力所能及。1684 年 7 月,作为某些单摆实验的结果,胡克宣称“根据那个原理(反平方定律)可以证明所有关于天体运动的定律,而且他自己就做到了这点”^②。为了鼓励这项研究,雷恩“声称他将给胡克先生或我(哈雷)两个月的时间,以便对此提供一个令人信服的证明给他,除了荣誉以外,还可以得到一本 40 先令的书作为礼物。克里斯托弗爵士不信

① 1686 年 7 月 27 日牛顿致哈雷的信。

② 1686 年 6 月 29 日哈雷致牛顿的信。

他(胡克)能做到这一点”^①。哈雷和雷恩一样,也不愿意接受胡克的论点,因此他在同年8月到剑桥访问了牛顿,希望从他那里了解到,他能否说明如果一个物体在有心力的作用下运动,并且这个力随着物体到力心距离的平方成反比变化的话,则此物体的路径应当是什么。牛顿立刻答复他说,这个路径应当是一椭圆,并且答应送给哈雷一个他在若干年前所完成的证明的手抄本。由于未能找到这个证明,牛顿就再次去解决这个问题,并在11月把一篇论文送给了哈雷,其中包含有“一个沿椭圆运动的物体是在一个指向椭圆焦点的吸引力作用之下,力的定律是反平方定律”的证明。于是哈雷又在同年12月第二次访问了牛顿。在这次访问中,哈雷看到了一本关于天体力学(牛顿对它一直有兴趣)的论著的手稿,由于认识到它的极端重要性,他在1684年12月10日英国皇家学会的一次会议上报告了这件事。^②

哈雷的要求重新引起了牛顿对行星运动问题的兴趣。虽然牛顿的计算完全证实了自己的看法,即认为地球的引力达到了月球,并遵从反平方定律,但这些计算却是立足于一个未予证明的假定之上的,这就是:球体在吸引其他物体时就好像它们都是点一样,也就是说,就好像它们的质量集中于它们的中心上。这可能就是他决定把他1666年的研究结果搁置多年的原因。他通过一段漂亮的推理确立了这样一个事实:一个球形薄壳在吸引它外面的质点时,就好像球壳的质量都集中在中心一样,又因为一个实心球可以看成是由许多同心球壳所构成,所以不管所有的球壳是密度均匀的,或是密度随它们到中心的距离而变化,吸引力都会和全部质量集中在中心的情形一样。因此,太阳系中所有星球的运动都可以根据下一假说来说明:它们的行为就好像是一些具有质量但没有大小的质点,并且力的反平方定律可以应用于整个太阳系。

当时,皇家学会曾要求哈雷提醒牛顿记住他的诺言。牛顿答应了哈雷的要求,表示欣然同意“把他关于运动的种种概念编入记录”,并且立刻开始工作,以便使他的理论结果更趋精确。我们有他自己的证

① 1686年6月29日哈雷致牛顿的信。

② 在1684年12月10日皇家学会的一次会议上,“哈雷先生报告他最近曾在剑桥看到牛顿先生,牛顿把一篇奇妙的论文《论运动》拿给他看,并说,根据哈雷先生的愿望,他答应把它送给皇家学会编入记录。哈雷先生希望牛顿先生记住自己的诺言,即由他自己保存他的发明,直到他有空能出版它为止”(Birch, IV, 347页)。

词说明,他是在1684年11月或12月着手写《原理》的,他写道:“原理一书写了大约十七八个月,其中约有两个月的时间是在旅途中度过的,原稿送给你们皇家学会是在1686年春(并在1686年4月28日发表),写作它的时间短促,这就使书中所犯的某些错误在所难免。”在一种科学史上无与伦比的惊人的努力之下,《原理》的第一卷到1685年夏天就写好了。12个月后他又完成了第二卷,并开始写第三卷。第一卷受到了英国皇家学会(该书是奉献给它的)的热烈欢迎,但是它的发表仍然引起了一场激烈争论。哈雷在翌年5月写信告诉牛顿说他的“无与伦比的论著”受到学会的热烈欢迎时,对牛顿写了这么一段话:

“我应当再告诉你一件事,就是胡克先生对于你的重力减小与到中心距离的平方成反比这个法则的发明还有一些要求。他说你是从他那里得到这个概念的……胡克先生似乎希望你在序言中稍微提到他一下。”^① 牛顿在几天以后从三一学院发出的回信中表现了极大的克制。“我感谢你写给我的关于胡克先生的一切,”他写道,“因为我希望我们之间可以保持良好的了解。”^② 然而在以后一封信(1686年6月20日)中,他变得更加严肃了。这并不奇怪,因为牛顿对于自己卷入这场争论的旋涡已经逐渐感到厌烦,这一次感情上的爆发似乎促使他决心终止这些无益的争辩。他在很严厉地驳斥了胡克的要求之后宣称道:“我原来向你指出整部书共有三卷,第二卷已在去年夏天完成。……第三卷要采用你的彗星学说……第三卷我现在打算不发表。哲学是一位如此无礼的爱争论的妇人,以致一个男人如果跟她发生关系就不得不忙于法律诉讼。我早就发现这点了,当我现在再度接近她时,她立即对我发出了警告。”^③ 牛顿几乎没有写完这封信,当时他从某人那里知道了一件事,“这个人是从另一个最近出席了你们的一次会议的人那里间接了解到,胡克先生如何想在会上引起极大的纷扰,他妄称我从他那里剽窃了一切,并且要求大家为他主持正义”^④。这件事激怒了牛顿,他不再宽恕这个被他斥之为粗鄙无能之辈的不幸的胡克了。“数学家是发现、解决和研究所有问题的人,他们必须满足于仅仅做一个枯燥无味的计算者和苦干的人,而另外一些只想冒充和抓住所有东

① 1686年5月22日哈雷致牛顿函。此段引文出自剑桥皇家学院图书馆中的原信。

② 1686年5月27日牛顿致哈雷函。此段引文出自剑桥三一学院中的原信。

③ 1686年6月20日牛顿致哈雷函。此段引文出自英国皇家学会图书馆中的原信。

④ 1686年6月20日信件的附言。

西的人,一定要拿走步其后尘的以及走在他前面的人的所有发明。……在某些方面,胡克先生的信过分地富有赫维留^①和其他人的幽默了。”^② 耐心的哈雷刚一收到这封信,就去恳求这位执拗的天才改变他的意旨。“我衷心地感到歉疚,”他写道,“在这全人类都应该向你表示感激的事件上,你竟碰到了使你不安的事情……现在我必须再次恳求你,不要让你的怒火冲天,以致使我们失去你的第三卷。”^③ 这封信使牛顿恢复了平静,并在回信中采取了比较缓和的态度。“现在我明白,”牛顿写道,“他在某些方面诬蔑了我,我想我对你最近给我的一封信中的附言已经不介意了。”因此牛顿马上答应了哈雷的恳求,在4月6日把第三卷交给了皇家学会。这部论著整个就完全了,并在1687年5月以《自然哲学的数学原理》为名出版。

《原理》共有三卷。在第一卷《论物体之运动(一)》中,隐含有两物体之间作用力的定律 $F \propto \frac{mm'}{d^2}$,还考察了物体在无阻力媒介存在的有心力作用之下的轨道。基本定律出现在命题 X1 中:“如果物体围绕一个焦点描出椭圆轨道,则力的大小与它到焦点距离的平方成反比。”通常称为最高成就的命题 LXX1 叙述并证明了这样一个定理,即两个球体在相互吸引时,显得它们的质量好像集中在球心一样。第二卷《论物体之运动(二)》一开始是研究物体在阻力媒介中的运动。首先考察的是阻力与速度成正比的情形,以后推广到与速度的平方成正比的情形,再以后便是推广到与速度及其平方的线性组合成正比的情形。这一卷考察了笛卡儿的涡旋说,并指出它不可能是一个动力学系统。第三卷《论宇宙系统》是根据前两卷中所概述的原理描述了宇宙系统的结构。其中包括对月球运动、潮汐理论和彗星动态的说明。在这里牛顿非常详细地确定了 1680/1 号彗星的轨道,并且指出这些天体乃是太阳系中的成员,它们遵从天体运动的所有定律,而非像笛卡儿和其他人所曾经认为那样是一些反复无常的天体。虽然牛顿在构思他的理论时使用了微积分的方法,但他认为整部著作极宜用几何形式来表达,因为他觉得,较之用新的微积分方法,用人们比较熟悉的古几何方

① Johannes Hevelius(1611~1687),德国天文学家,月球地形测量学奠基人。此处牛顿讥讽胡克是无中生有,异想天开。——译注

② 1686年6月20日牛顿致哈雷的信。

③ 1686年6月29日哈雷致牛顿的信。

法来表达会使这本著作更经得起挑剔。

然而,认为它容易读的人并不多。“但是,先生你没有考虑到你的读者的无能,”吉伯脱·克拉克写道,“如果你的书是在二三十年前到我手里的话,我可能要比现在更花力气。”这显然没有使牛顿感到惊奇,因为他回答说:“你在读一本难书时遇到一些迟疑,这一点我并不奇怪。”

《原理》无疑是牛顿的一部杰作。它的地位之所以在其他所有力学著作之上,是由于万有引力的发现:宇宙中每个物质粒子都要被所有其他物质粒子所吸引,吸引力与它们相隔距离的平方成反比。这是第一次对完全的动力学系统的详细说明,地球和天体中所有主要的运动现象,都可归结为这一个普通的定律。如果我们回忆起牛顿在开始研究时所掌握的是一组多么不相称的定理,这一切就更加令人大吃一惊了。铭感在心的哈雷说得有理:“我希望你不要因为你在完成一部如此可钦佩的著作时经受了劳苦而感到后悔,它对你自己和对国家乃是极大的荣誉。”^①

从上文可以清楚地看出,在17世纪后半叶数学取得了惊人的进展。牛顿和莱布尼兹给予数学家一个强有力的工具,直到这个世纪末,这个工具都在被人们有力地、巧妙地使用着。以后一个世纪证明它是值得继承下来的。但是,新方法的引入把许多问题弄得大为复杂起来。牛顿和莱布尼兹遗留给我们的微积分是非常令人钦佩的,但它不完全为人们所理解,在根据它建立任何永久性的结构之前,首先必须批判地考察其基础。这就是下一世纪中的主要工作之一,下文我们将看到人们是怎样勇敢承担起它来的。

^① 1687年7月5日哈雷致牛顿的信。

第十二章 分析方法的发展

随着 18 世纪的开始,我们进入了一个热烈的数学活动的时期,这种热烈的活动不停顿地一直延续到今天。微积分的发明揭开了数学史上的新纪元,扩大了数学的范围,并且提出了新的发展方向。数学现在跟其他科学紧密地联系了起来,特别是跟物理学和天体力学,而作为这种联系的结果,数学受到猛烈的推动。然而,当微积分离开了牛顿和莱布尼兹之手时,它还没有被安放在任何可为今天所接受的逻辑基础之上。牛顿是以含糊的流数说作为他的解释根据,莱布尼兹则坚持一种错误的、定义模糊的无穷小概念。新方法可以导致惊人的结果这件事,已不再能使我们目前正在进入的这个时期的数学家感到满足了。在进一步探讨这些新方法并开发其潜力之前,先要考察一下这个伟大建筑所立足的基础,这是一件刻不容缓的工作。

在这个数学复兴时期,许多国家都作出了贡献。英国的数学家立刻便去推广他们著名的同胞留给他们的办法,并且在这个世纪结束之前,出现了一些数学家,他们做出了颇有前途的工作。其中最早一个就是罗吉·库兹(1682~1716),这是一位有才华的青年学者,他的夭折曾使牛顿叹息说:“假使库兹不死,我们可能又知道好些事情。”库兹紧紧跟随着他的老师,在 1731 年出版了《原理》的第二版,并由他加上了一篇配得上那本伟大著作的序言。这篇序言由于它对牛顿的万有引力原理的精彩而有力的辩护,受到了人们的注意。库兹也写过一些数学论文,其中主要是 *Logometria* (《度量学》,《皇家学会会报》第 29 期,1714,5~45)。这篇论文对于各种对数制及其在求面积上的应用作了详尽的比较。这些论文大都被收集在他出版于 1722 年的 *Harmonia Mensurarum* (《度量的和谐》)一书中。德·摩根曾把这本著作说成是“把

流数说应用于对数和圆的性质而得到决定性进展的最早的一部著作”^①。它的内容在同期的《皇家学会会报》139 页中被概括成这样几句话：“该书共有三部分。第一部分叫做 *Logometria*，作者在这一部分的主要意图是要说明怎样才可以把那种经常化为双曲线和椭圆求积的问题，转化为比例和角度的度量……*Logometria* 的结尾有一个总注解，其中包括大量各种各样的有关对数和三角学的优美作图，例如给出了几何曲线或力学曲线的长度、它们的面积和重心、由它们所形成的立体体积、这些立体的表面积以及自然哲学中几个有关物体的引力、流体的密度与阻力和行星的轨道等稀奇古怪的问题。”除了详尽地讨论了流数术的应用之外，在 *Harmonia Mensurarum* 中还描述了以库兹的名字命名的圆^② 和他的螺旋线的性质，并载有一张今天应认为是依赖于对数和圆弧的积分表。在这本著作中，库兹自由地使用了虚数，由于建立了 $i\theta = \ln(\cos\theta + i \sin\theta)$ ($i = \sqrt{-1}$) 这个关系式，他有几分猜到了著名的棣莫弗定理。库兹也是最早看到从一系列不一致的观测结果中选择适当平均值的方法(最小二乘法)的。

比库兹年纪大一点的是阿伯拉罕·棣莫弗，他虽是法兰西血统，但他大部分的岁月却是在英国度过的。他曾给《皇家学会会报》写过几篇论文，它们涉及到的问题很广泛。其中最著名的一篇发表于 1711 年，题为 *De Mensura Sortis* (《论赌博法》)^③。这篇值得注意的论文所讨论的是概率论，这门科目在他手里受到了新的有力的推动。该文刊登在接连三期《皇家学会会报》上，文中少说也有 26 个关于机会对策的问题。其中包括著名的点的问题 (Problem of points)，这个问题一直吸引了费尔马和帕斯卡去进行理论研究。然而，棣莫弗超过了他的前人，因为他考虑到游戏者具有不同技巧的情况 (例如，A 要 4 点就获胜，B 要 6 点获胜，A 赢得一点的机会与 B 赢得一点的机会之比等于 3 比 2)。他也考虑到有三个游戏者参加的情况。这篇重要的论文后来又被棣莫弗发展成《机遇说，即在游戏中计算事件概率的方法》一书。这本著作中除了一些讨论年金的问题之外，共有 74 个问题，其中许多

① De Morgan, *Penny Cyclopaedia*, VIII, 87 页。

② 参看 E. W. Hobson, *Plane Trigonometry*, 第 4 版, 241 页。

③ 整个标题是 *De Mensura Sortis, seu de Probabilitate Eventuum in Lundis a Casu Fortuito Pendentibus* (《论赌博法，或关于游戏中机遇巧合的概率》)，《皇家学会会报》，1711 年 1 月、2 月、3 月号。

是惠更斯在 60 年前所提出而未曾解决的。棣莫弗在解决这些问题时建立了下面的定理。假如在单独一次试验中事件发生的可能性等于 a 比 b , 则在 n 次试验中此事件至少发生 r 次的机会可由 $(a+b)^n$ 的展开式中取前 $(n-r+1)$ 项再除以 $(a+b)^n$ 而求得。此外, 棣莫弗在绪论中还建立了下列原理:

“假定有关的事件数共有 n 个, 而且这些事件可能发生的机会都等于同一个数字 a , 可能失败的机会也都等于同一个数字 b , 将 $(a+b)$ 自乘 n 次。再假定 A 和 B 一同游戏, 规定如果在有关的事件中任何一个或一个以上的确发生了, 则 A 获胜而 B 失败。A 获胜的概率将是 $\frac{\{(a+b)^n - b^n\}}{(a+b)^n}$, B 获胜的概率将是 $\frac{b^n}{(a+b)^n}$ 。但在 A 和 B 游戏时如果规定有关的事件中若有任何两个或两个以上的确发生的话, A 才获胜, 而在仅有一个发生或一个也不发生的情况下则 B 获胜, 那么, A 获胜的概率将是:

$$\frac{(a+b)^n - nab^{n-1} - b^n}{(a+b)^n}$$

他失败的概率乃是用 1 减去以上的数量, 也就是 $\frac{nab^{n-1} + b^n}{a^n + b^n}$, 因而 A 的机会比 B 的机会等于 $\{(a+b)^n - nab^{n-1} - b^n\}$ 比 $b^n + nab^{n-1}$ 。”

例如, 假定 A 拿一颗骰子来与 B 打赌, 在八次投掷中他要掷两次或两次以上的么点, 他获胜的概率多大? 或者说, 他有利或不利的可能多大?

因为只有单独一个机会有利于 A, 五个不利于他, 令 a 算作 1, b 算作 5, 又因为所掷次数是 8, 令 n 算作 8, 于是 A 获胜的概率将是

$$\frac{(a+b)^n - b^n - nab^{n-1}}{(a+b)^n} = \frac{663\ 991}{1\ 679\ 616}$$

因此他失败的概率是 $\frac{1\ 015\ 625}{1\ 679\ 616}$, 有利对不利是 1 015 625 对 663 991, 非常接近于 3 对 2。

从下面随便挑选的一个问题可以看出, 棣莫弗所解决的某些问题是相当难的。棣莫弗在论证中广泛地使用了他的循环级数说, 这个学说使他完成了现代应称之为有限差中线性方程的积分的运算。

例如, A, B, C 三人蒙着眼睛从一堆筹码中每次取出一个筹码, 这堆筹码共有 12 个, 其中 4 个是白的, 8 个是黑的。取法是: A 开始先

取, B 跟在 A 的后面, C 跟在 B 的后面, 然后 A 再开始取。他们按照这样的次序继续取下去, 直到其中有一人第一次取到白筹码就算获胜。他们获胜的概率各是多少? 棣莫弗给出的解答是 77:53:35。同样的问题在 9 年前也曾出现在 J. 伯努利的 *Ars Conjectandi* (《猜测的艺术》) 中。

1730 年他的 *Miscellanea Analytica de Seriebus et Quadraturis* (《关于级数和求积的综合分析》) 一书出版了, 其中包含有关于级数的重要知识, 棣莫弗利用这些知识大大扩充了分析学的范围。他在第二章 (*De Natura Serierum Recurrentium*, 《论循环级数的性质》) 中推广了他关于循环级数学的研究结果, 并且精心构筑了排列与组合的理论。在统计调查中极为重要的正态分布曲线, 就是他在本书中引进的。棣莫弗在这本书里广泛地使用了虚数, 特别是在三角学中, 这门学科在他手里成了分析学的一个分支。在第一章建立了通常以他的名字命名的一个关系式, 即对于所有的实数值 n , $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$ 的值是 $\cos n\theta + i \sin n\theta$ 。然而这个重要的定理当时并不是用我们现在看惯了的这种形式发表的。导出这个关系式的命题是在《综合分析》的一开头出现的, 在那里棣莫弗证明了如下的关系: 如果 l 和 x 是单位圆上两个圆弧 A 和 B 的余弦, 并且 $A = nB$, 则有

$$x = \frac{1}{2} \sqrt[n]{l + \sqrt{l^2 - 1}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{l + \sqrt{l^2 - 1}}}$$

由于 $l = \cos A$, $l^2 - 1 = -\sin^2 A$, $\sqrt{l^2 - 1} = i \sin A$

所以

$$x = \frac{1}{2} (\cos A + i \sin A)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2} (\cos A + i \sin A)^{-\frac{1}{n}}$$

又因 $A = nB$, 上式变成

$$x = \frac{1}{2} (\cos nB + i \sin nB)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2} (\cos nB + i \sin nB)^{-\frac{1}{n}}$$

现在, $x = \cos B = \frac{1}{2} (\cos B + i \sin B) + \frac{1}{2} (\cos B - i \sin B)$ 。由这些关系就不难导出今天众所周知的定理, 即 $(\cos nB + i \sin nB)^{\frac{1}{n}}$ 和 $(\cos nB + i \sin nB)^{-\frac{1}{n}}$ 的值分别是 $(\cos B + i \sin B)$ 和 $(\cos B - i \sin B)$ 。

J. 斯特林 (1692 ~ 1770) 追随着棣莫弗利用级数的方法。他在 1718 年

交给英国皇家学会一篇研究报告 *Methodus Differentialis Newtoniana Illustrata* (《牛顿的著名微分法》,《皇家学会会报》第 30 期,1719),后来这篇报告又被扩充成 *Methodus Differentialis sive Tractatus de Summatione et Interpolatione Serierum Infinitarum* (《微分法,或关于无穷级数的简述》,1730)一书,其中包含有后来由马克劳林发表出来的一个定理。斯特林写给《皇家学会会报》的另一篇重要论文《关于地球的形状以及重力在其表面上的变化》(1735)也是值得我们回忆的。

当时最有天才的数学家之一是柯林·马克劳林,由于他的才能,他起先在阿伯丁,后来又在爱丁堡担任数学教授。他在很年轻时就因为发表 *Geometrica Organica sive Descriptio Linearum Curvarum Universalis* (《组织几何学,或关于一般曲线的说明》,1720)一书而引人注目,他在这本书中描述了作圆锥曲线的一些新的巧妙方法。这本著作还精辟地讨论了圆锥曲线以及高次平面曲线的种种性质,并且推广了帕斯卡的六线形(Pascal's hexagram)。马克劳林有力地捍卫了牛顿,驳斥了贝克莱大主教的攻击,因此永远值得我们怀念。这些是发表在 1742 年的《流数论》中的,前一章已经提到这本书。但对数学家来说,这本著作之所以引人注目则是由于它第一次系统解说了牛顿的方法。在这本书里可以看到以他的名字命名的那个定理,即:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2 f''(0)}{2!} + \frac{x^3 f'''(0)}{3!} + \dots$$

马克劳林在 1740 年还写过一篇关于潮汐的短文,由于这篇短文,他和欧勒及 D.伯努利一起获得了法兰西科学院授予的奖金。他也写过一些论文^① 给《皇家学会会报》,其中包括对若干物理数学问题(诸如物体的碰撞和引力理论)的研究,并进一步研究了各种曲线的描绘方法和性质。在所有这些方面,他都表现出自己是一个有能力的数学家。和希腊人一样,马克劳林也是用怀疑的眼光来看待无穷小概念的。他相信大多数问题不依靠微积分就能解决,因此墨守着古典的几何方法。这些方法在他手中显得如此有效,以致妨碍了更有力的分析方法的发展。例如,克来劳在其关于地球形状的论著中就放弃了分析方法而恢复传统的几何方法。但马克劳林在这方面最为显著的影响

^① 即 *Tractatus de Curvarum Constructione et Mensura, ubi Plurimae Series Curvarum Infinitae vel rectis mensurantur vel ad simplices Curvas reducuntur* (《论各种曲线的结构和测量,或用直线测量各种曲线的无穷级数或归纳为最简单的曲线》),《皇家学会会报》,1718,803 页。

主要是在英国。

和马克劳林同时代的是布鲁克·泰勒。他也是一个热心崇拜牛顿方法的人,曾在 *Methodus Incrementorum Directa et Inversa* (《增量方法及其逆》,1715)一书中发展了这些方法。在这本书中他奠定了有限差分方法的基础。书中还有他的单变量的幂级数展开的著名公式,即

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots$$

用现代标准来衡量,他的证明是不严格的,因为和他的许多同时代人一样,泰勒也没有认识到在处理无穷级数时必须要求它收敛。柯西在 100 多年后补充了一个严格的证明。

泰勒还编写过两本关于透视画法的书,名为《线性透视》(1715)及《线性透视原理》(1715 及 1749)。他也曾转而注意力学问题,特别是有关弦振动的问题。在物理学方面他给《皇家学会会报》写过一些重要的论文,其中包括对于发现磁引力定律的实验的说明,对改进分几次提取方程之根的近似方法的尝试,后者包括计算对数的一种巧妙的新方法。

英国数学学派最后一个值得注意的代表人物是约翰·兰登(1719 ~ 1790)。他首次成名是由于发表了一篇短文《关于圆的某些特殊性质的研究》(《皇家学会会报》,1754)。在此以后 6 年,又发表了《剩余分析》。在这本书里他用纯粹的代数方法代替了更普遍的依赖微积分的方法,解决了若干关于决定切线、曲率半径、渐屈线和渐伸线的问题。他希望这样可以避免有关流数方法的模糊之处。他还写过两篇更重要的论文给《皇家学会会报》(参看附录一),其中第二篇包含利用两个椭圆弧来求双曲线弧长的表示式。

在兰登以后,英国有一个多世纪没有出现一流的数学家。英国人对于当时在欧洲大陆上系统发展起来的方法开始采取一种冷淡的态度。他们墨守着《原理》的几何方法,这是不幸的,因为它的后果是长久阻碍了这个国家的数学进展。拉兰得(《孔多塞^①生平》作者)曾悲叹说,1764 年以后整个英国没有一个一流的分析学家。

但在欧洲大陆,在伯努利家族的影响下,微积分正在迅速成为一种具有巨大分析力的工具。此外,它又是用一种精巧的符号表示出来的。可以看出,在位君主所显示的兴趣乃是欧洲大陆上数学得到普及

① Condorcet, Mair Jean Antoine Nicolas (1743 ~ 1794), 法国数学家和哲学家。——译注

的一个不小的原因。在这些伟大的统治者中有很多人喜欢以学术的扶植者自居,他们鼓励新形成的学术团体的发展,科学活动就是以这些学术团体为中心的。此外,他们又把那些在科学上已经成为著名人物的人士吸引到宫廷里来。例如我们知道,腓特烈大帝就认为“在欧洲最伟大的国王身边应当有最伟大的数学家”,因此他把伟大的拉格朗日召进了宫廷。凯瑟琳大帝愉快地接受了欧勒的谒见。从1643年直到1715年掌握着统治权的路易十四,则表现出自己是一个对科学和艺术慷慨的扶植者,即使不是一个很有鉴别能力的扶植者。这些统治者的动机是否完全属于利他主义性质,是令人怀疑的,但事实是在机器改进和战争艺术上所出现的种种重要发展方面,他们完全可以成为有益的力量。但是,尽管君主国家表现了这样的兴趣,而首先在学术上居领导地位的却是瑞士。长久以来一直作为学术中心的巴塞尔自由城,在城内给来自安特卫普的难民伯努利家族提供了一个避难所。这个天赋聪颖的家族几乎对数学的每个分支都作过最有价值的贡献,欧洲大陆上微积分的迅速发展多半应归功于他们的热忱与才能。其中首先是詹姆士·伯努利(亚可伯^①)。他在1654年生于巴塞尔,从1687年到1705年去世,他一直在故乡担任数学教授的职位。在这段时期,他和莱布尼兹一直保持着积极的通信联系,对莱布尼兹表现了衷心的敬佩,并且不久就完全掌握了他的方法。紧接着詹姆士·伯努利便开始用大家都能懂得的语言去解释新方法的原理。这就是他在世纪末出版论文集 *Specimen Calculi Differentialis; De Methodo Tangentium Inversa* (《微分学方法,论反切线法》,1694)的目的。在詹姆士作过显著贡献的许多分支中,可以提到的有概率论、变分学和解析几何的推广。

在惠更斯的论著 *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (《关于赌博游戏中的推论》,1657)发表之后,概率论一直引起广泛的兴趣。今天从牛顿的信件中可以清楚地看出,他就注意过概率论的问题,并曾获得某些显著结果。马勒伯朗士的学生孟特摩(1678~1719)在1708年出版过一本关于机会对策的书 *Essai d'Analyse sur les Jeux de Hazards* (《关于机遇游戏的分析研究》),其中有一些新奇的问题并且流传极广。但是一直到詹姆士·伯努利,才给概率论建立了牢固的数学基础。他就这个题

① 以后他就用这个英文教名。

目给《博学杂志》(1685)写过一些论文,其中典型的问题可表示如下:

1. A, B 二人玩一颗骰子,先掷出幺点的人算是胜利者。A 掷一次之后接着 B 也掷一次。然后 A 掷两次, B 再掷两次。然后 A 掷三次 B 掷三次,依此继续下去。每人获胜的希望多大?

2. 或者, A 先掷一次, B 再掷两次,然后 A 掷三次, B 再掷四次,依此继续下去。

每个这样的问题都悬而未决,直到伯努利自己在 1690 年的《博学者学报》(以后又在《猜测的艺术》)一书中才发表了解答。

伯努利在他的伟大著作《猜测的艺术》中充分发展了这些论文中所引入的观念。这本书出版于 1713 年,就是他死后 8 年,亦即在棣莫弗的《机会说》出版前 9 年。这本书可以说是把概率论建立在稳固的数学基础上的首次认真的尝试。该书原计划共有四篇,各篇特点可以描述如下:

1. 重新提出惠更斯的问题。

2. 排列与组合理论的详尽论述。这一篇的第四和第五章中有很多东西即使拿到近代论著中也无不当之处。

3. 对机会对策中所产生的各种各样新问题的解答。

4. 概率论在民间、道德和经济问题上的应用。

这本书是从这样一个问题开始的: A, B 二人玩两颗骰子,规定 A 若掷出六点就算获胜, B 若掷出七点算获胜。A 先掷一次而后 B 掷两次。然后 A 再掷两次,如此直到其中一人获胜为止。他们获胜的相对机会多大? 伯努利证明了, A 与 B 获胜的机会之比等于 10 355 比 12 276。

随后是许多同样类型的问题。然而,在惠更斯留下来没有解出的所有问题当中,最后 5 个问题是最值得注意的。其中引入了游戏的持久期概念,这是一个曾使棣莫弗以及后来的拉格朗日和拉普拉斯煞费周折的课题。伯努利解决了所有这些问题,并以普遍形式给出了结果。这里我们说明伯努利的一个定理,用它可以确定一个经过反复试验的事件的概率可以无限趋近一个给定概率的范围。从伯努利自己的话中可以清楚地看出他因为这个发现而自豪:“这个问题我压了 20 年没有发表,现在我打算把它公诸于世了。它又难又新奇,但它有极大用处,以至在这门学问的所有其他分支中都有其高度价值和位置。”^①

^① *Ars Conjectandi*, 227 页。

为了说明这个定理,让我们假定——伯努利说——将 $(r+s)^n$ 用二项式定理展开。所有字母都表示整数,而且 $t=r+s$ 。令 u 是最大项与 n 个前项及 n 个后项之和。然后把 n 取得足够大,使得 u 与展开式中所有其余诸项之和的比可以任意地大。作为例子,伯努利取 $r=30, s=20$,因此 $t=50$ 。于是,为了使事件发生的次数与试验总数之比介于 $\frac{31}{50}$ 和 $\frac{29}{50}$ 之间,若事件发生的可能性等于 $\frac{1}{1\,000}$,做25 550次试验就够了;若事件发生的可能性等于 $\frac{1}{10\,000}$,做31 258次试验就够了;若事件发生的可能性等于 $\frac{1}{100\,000}$,做36 966次试验就够了,等等。^①

为了弄清楚这些,让我们假定有一个装着白球和黑球的壶,其中白球和黑球的个数成3:2。前面的结果告诉我们,如果每次从壶中取出一个球,取出后再放进壶内,共取25 550次,则取出白球的次数介于取球总次数的 $\frac{31}{50}$ 和 $\frac{29}{50}$ 之间的可能性等于 $\frac{1}{1\,000}$ 。

在我们考察欧勒和拉格朗日的工作时,我们将回到概率论这个课题上来。在当时,《猜测的艺术》鼓舞了一些不大有名的作者转向这门诱人的学科。丹尼尔·伯努利便是一个非常喜欢这门学科的人。他的*Specimen Theoriæ Novæ de Mensura Sortis*(《赌博法新论》,1730)以其大胆和周到而引人注目。伯努利在这本书里把他的研究推广到包括人寿保险和健康统计的问题。他的*Disquisitiones Analyticæ de novo Problemate Conjecturali*(《关于猜测的新问题的分析研究》,1759)是一本更加伟大的书。托马斯·辛普森(1710~1761)所写的《机会的本质和规律》(1740)并非不重要,但其内容很少是更早的著作中所没有的。他还编过一本关于年金的书《年金论与将来享有权》(1742)。还有一个英国人叫托马斯·贝斯(1761年去世),也对这门科目作过贡献。这记载在1763年的《皇家学会会报》《试解机遇论中的一个问题》中。他在这篇文章里解决了这样一个问题:给定未知事件发生和不发生的次数,求在单独一次试验中事件发生的概率落在任意两个可以指定的概率等级之间的机会。

曾经有人声称,在拉普拉斯的不朽论著*Théorie Analytique des Probabilités*(《概率分析理论》,1812)发表之前,棣莫弗对概率问题的贡

^① Todhunter, *The History of the Theories of Probability*, 71 页。

献超过任何其他作者(包括詹姆士·伯努利在内),这话是可以争论的,但在开辟另一个数学科目上,伯努利的优先权则是无可非议的,这就是变分学。它是一个全新的分支,其特点可以简述如下:

考虑不在同一铅垂线上的 A, B 两点。这两点可用无限多条线相连,其中直线显然最短。但假定我们所要知道的,是在所有这些路线中,哪点路线使一质点从 A 点沿着它滑向 B 点的时间最短?

这类问题可以追溯到古代。大家记得,阿基米得证明过,在给定周长之下,面积最大的图形是圆,在“迦太基的传说”^① 中也有同样性质的问题。求最速下降线的问题在伽利略和莱布尼兹的著作里曾模糊地出现过。在 18 世纪,力学的迅速成长刺激了这个问题的的发展,在詹姆士·伯努利解决了他的兄弟约翰所提出的最速下降问题后,它就一跃而居于显要地位。约翰提出过六个相当难的问题。这些问题在《博学杂志》(1697 年 12 月 2 日)中都有,其中一个是在给定一根水平轴上画出的所有半椭圆中,需要求出一个半椭圆,使得物体沿着它的凹面滑下来的可能时间最短。在 1700 年《博学者学报》的 *Solutio Propria Problematis Isoperimetrici* (《等周问题实解》)一文中詹姆士对这些问题的解答,这是一篇透彻而渊博的杰作。一个质点在重力作用之下从静止状态开始滑行到另一不处在同一铅垂线上的点所遵循的曲线——最速下降线,被证明为摆线。此外,一个仅仅在重力作用之下的质点从静止状态出发沿摆线(等时曲线)滑下去时,不管运动从曲线上哪一点开始,到达同一终点总是花同样的时间。变分学的问题也曾被拉格朗日、柯西、勒让德、高斯详尽讨论。^②

詹姆士·伯努利对曲线几何也有贡献,由于引入了极坐标观念,他说明了某些高次曲线可以比较容易地画出来。而且,在研究它们的性质时,用极坐标表示它的方程比用直角坐标表示好。例如双曲线的直角坐标方程是 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$,而当我们把它的方程写成 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ 时,它的性质就不那么模糊不清了。

《猜测的艺术》中还有一篇关于级数求和的研究报告(见该书 240 ~ 300 页)。伯努利求得下列级数的和:

① 有人给黛多皇后一张牛皮,她要用这张牛皮围起尽可能大的面积。她把牛皮割成了一长条,用它围成了一个半圆。

② 参看以下各章及 I. Todhunter: *History of the Calculus of Variations during the Nineteenth Century*, 1861。

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

他的方法是写出:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n+1}$$

及

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

相减后,

$$0 = -1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n+1}$$

所以,

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

亦即一个级数若其第 r 项是 $\frac{1}{r(r+1)}$, 则此级数的 n 项之和为 $\frac{n}{n+1}$ 。

他似乎比当时大多数数学家更加熟悉无穷级数。他证明了, 级数

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

大于级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

从而证明了前者的和是无穷大。后一级数则已由他的弟弟约翰证明为无穷大。他还证明了无穷级数

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

的和是有限数, 但他承认自己求不出它的值来。欧勒 (*Introductio in Analysin Infinitorum*, 《无穷小分析引论》, 1748) 曾证明这个和是 $\frac{\pi^2}{6}$ 。大家记得, 牛顿在写给奥尔登堡的那封叙述这个定理的发现的著名信件 (1676 年 10 月 24 日) 中, 曾经满足于这个定理的陈述, 并用一些仔细挑选出来的例题来说明它, 但没有给出任何证明。詹姆士·伯努利所补充的证明是最早的, 然而伯努利只限制于指数是正整数的情况。大约在 60 年后, 欧勒才想出了一个适用于指数的非正整数的证明。他的证明是巧妙的, 但不完全, 因为他未能建立必需的收敛条件。

约翰·伯努利 (1667 ~ 1748) 在他哥哥詹姆士逝世后就成为巴塞尔的数学教授。他是一位多产作家, 对许多数学部门都作过极其重要的

贡献。和他的哥哥一样,他也是莱布尼兹的热诚拥护者,即使不是一个执迷的拥护者。在为莱布尼兹的方法辩护时,他的影响也不小。他的 *Lectiones Mathematicæ de Methodo Integralium* (《积分法的数学讲义》) 是微积分发展中的一个里程碑。曲面的求积、曲线的求长和不同类型的微分方程的解法,这些都可以在这本书中找到,书中还充满了各种不同的积分方法的例子。他在等周问题上的研究,足以使他能与他的哥哥共享创建变分学的荣誉。他可能是发现最速下降线的第一个人,他把它命名为“*linea brachistochrona*”(最速降线),并把这项研究扩展到可以确定光线在各种不同密度的介质中所通过的路径。指数算法也是他的发现之一。

他在纯数学方面的研究虽然是他的天才的不朽标志,但他在力学,特别是天体力学方面的著述,也有很高价值。他在 *Discours sur les Lois de la Communication du Mouvement* (《论运动的交换规律》,1727) 这篇论文中研究了运动定律,并在较后的一篇短文(1734)中讨论了行星的椭圆轨道和行星轨道的倾斜度。

这个有才华的家族中第三位值得注意的人是约翰的儿子丹尼尔·伯努利(1700~1782)。他的一生多半也是在巴塞尔城度过的。他的 *Exercitationes Quadam Mathematicæ* (《几门数学练习》) 出版于1724年,书中包含有现今以他的名字命名的(黎卡提所提出的)微分方程的解法。我们曾提到,他还研究过概率的问题,但是,他的最有价值的研究是在力学方面。由于对这些问题应用了新的分析方法,他解决了许多直到当时一直被公认为解不了的问题。他的研究遍及振动弦的运动和重链的摆动,他在解决这些问题以及与此类似的问题时,表现出处理偏微分方程的高超技巧。他在这个领域内的探索,使他不愧被称为数学物理方法的奠基人。在《流体力学》(1738)一书中,他研究了水的流动问题以及一个浮体当它从尾部喷出流体时所受到的反作用——这可能是喷射推进现象的最早例子。他认为气体的压强随温度的增加或体积的减少而增加,根据这一似乎合理的解释,可以说他已预见到气体分子动力论。

让我们从瑞士转向法国。法国虽然长期未能恢复她在17世纪所享有的卓越地位,但在当时欧洲大陆上正在发生的普遍复兴中,她仍然有一定地位。欧洲大陆上关于微积分的最早一篇论文是出自法国人之手。这就是吉劳美·法兰索斯·安东尼·罗彼塔(1661~1704)的

Analyse des Infiniment Petits (《无穷小分析》, 1696)。他是约翰·伯努利的学生, 并且很快就从他的导师那里获得了对新方法的热忱, 事实上, 可以毫不夸张地说, 新方法之所以在法国普及, 很大程度上是由于他的热忱。还有一些法国数学家也作了有价值的贡献。安东尼·巴伦 (1666 ~ 1716) 研究过笛卡儿的解析几何, 并把它推广到三维空间。他在 1700 年的学会上宣读的一篇论文中使用了三个坐标轴来展开球面方程。这在他的 *Essais et Recherches de Mathématiques et de physique* (《数学与物理研究》, 1713) 中对此作了进一步的发展。克来劳也研究过笛卡儿几何学的这一推广, 他的 *Recherches sur les Courbes a Double Courbure* (《关于双曲率的各种曲线研究》) 在 1731 年出版于巴黎。克来劳对于许多数学技巧的改进都有贡献。他曾想出一些新的解微分方程的重要方法, 这些方法被他灵活地运用于种种问题的解答中。形如 $y = xp + f(p)$ ($p \equiv \frac{dy}{dx}$) 的微分方程就是以他的名字命名的。可是, 由于马克劳林的几何方法获得成功, 致使克来劳抛弃了分析方法, 他在研究地球图形时 (*Théorie de la Figure de la Terre*, 《地球图形理论》, 1743) 使用的就是几何方法。这本著作中有一个重要公式, 可以用来确定不同纬度上的重力加速度。在较后一本著作 (*Théorie de la Lune*, 《月球理论》, 1752) 中, 他仍旧坚持几何方法, 这本论著使他获得了圣彼得堡科学院颁发的奖金。书中对于欧勒一直未能解决的月球拱点运动问题给出了解答。克来劳还写过一本几何学的书 (*Éléments de Géométrie*, 《几何原理》, 1741)。

他的同时代人达兰贝尔 (1713 ~ 1783) 也对数学特别是力学和天文学有过显著贡献。除去丹尼尔·伯努利的贡献之外, 力学在牛顿到达兰贝尔这段时期的进展很少, 直到达兰贝尔对它使用了有力的微分方法, 情况才有所改变。在研究振动弦的问题时, 达兰贝尔提出了一个微分方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

他在 1747 年写给柏林科学院的一篇论文中给出这个方程的解为:

$$u = \phi(x + t) + \Psi(x - t)$$

ϕ 和 Ψ 是任意函数。在同一篇论文中, 他还证明了虚数量可以化成 $a + b\sqrt{-1}$ 的形式, 这里 a 和 b 为实数。和库兹一样, 他已经发现三角函数和对数函数之间的联系。

他的杰出著作是关于动力学的,他的 *Tratié de Dynamique* (《动力论》,1743)一书大大改进了这门学科的一般理论。他的单摆实验使他得到了至今仍以他的名字命名的那个原理,即任何刚体系统的内部作用和反作用保持运动平衡。应用这个原理后,动力学中最复杂的问题就可化为简单的静力学问题,能用一般方法来解决。他用这个原理还能解释 18 个世纪以前首先由喜帕恰斯指出的岁差现象。他也研究过三体问题^①。后来他又把他所建立起来的原理推广到流体情形(*Traité de l'Équilibre et de Mouvement des Fluides*,《论流体的静止和运动》,1744)。几年后,达兰贝尔又对柏林科学院提出的流体阻力理论给出了一般解答(*Essai d'une Nouvelle Théorie sur la Résistance des Fluides*,《关于流体阻力的新理论研究》,1752)。他在流体动力学这门分支上的工作后来曾为孔多塞(1743~1794)和柏素特(1730~1814)所注意,进一步加以研究过,后者出版了达兰贝尔观察水管中水流的结果(*Traité Élémentaire d'Hydrodynamique*,《流体动力学引论》,1786)。

莫培督(1698~1759)的研究采取了不同的方针,他认为自然界中任何时候所发生的任何变化,总是使变化中所耗费的作用量尽可能地小,并且认为,从这个基本原理出发可以导出一切力学定律(*Essai de Cosmologie*,《论宇宙》,1750)。这种说法的原理颇令人费解,致使关于“作用量”一词的含义引起了无休止的争论,莫培督认为它是质量、速度与空间的连乘积。这些原理后来是由汉密尔顿在 19 世纪予以澄清的。

当时,在南方土地上,数学研究也正以同样持续的热忱进行着。起先在巴维亚,后来在米兰,担任数学教授的博斯考维奇(1711~1787)做了一些重要的单摆实验。这些实验和其他力学方面的研究构成了他的 *Elementa Universæ Matheseos* (《基本算术原理》,1754)一书的论题。黎卡提父子和曼弗来狄(1681~1761)则转而注意微分方程,在解答这些方程时他们显示了不少技巧。法格那诺(1682~1766)在其 *Prodizioni Matematiche* (1750)中表现出自己是一个有才能的数学家。他对椭圆和双曲线求长问题的尝试,曾引导他去研究椭圆函数,他的论文 *Thorema da cui si diduce una nuova misura degli Archi Ellitici, Iperbolici et Cycloidali* (1716)就是对这个重要题目的最早贡献,也是对欧勒的一个

① 参看附录二。

启发。拉格朗日虽然出生在意大利,但却在国外度过了他一生中最宝贵的光阴,我们马上就要谈到他。当时意大利最伟大的数学家是天赋特殊的玛丽亚·盖塔娜·阿格乃西(1718 ~ 1799)。她的论著 *Instituzioni Analitiche ad uso della Gioventù Italiana* (《意大利青年使用的分析原理》, 1748) 是关于新几何方法的一本有力的著作, 1815 年曾译成法文, 1801 年由考尔生译成英文(《分析原理》)。

直到 19 世纪到来的时候,德国还没有显示出她的实力,虽然当时最伟大的数学家拉格朗日是在柏林度过他一生中的大部分时光的。高斯在 1801 年发表《算术研究》之前几乎还没有名气。这个时期的数学家虽然只有少数对这门学科有所贡献,但有些人的贡献也非微不足道。其中主要的是赫尔曼、萨格纳和兰伯特。

约可伯·赫尔曼(1678 ~ 1733)是詹姆士·伯努利的门生。他编过一本动力学论著(*Phoronomia, seu de Viribus et Motibus Corporum Solidorum et Fluidorum*, 《论固体和流体的力和运动》, 1716), 但这本著作中没有什么独创之处。他还给《博学者学报》写过几篇重要的论文,讨论了曲面的求积和立体轨迹作图的问题。

J. A. 萨格纳(1704 ~ 1777)是哥廷根的数学教授。他在 1755 年出版了一本论旋转体的小册子(*Specimen Theoriæ Turbinum*, 《关于旋转体理论》), 其中包含有对物理天文学的重要贡献。水轮机就是由他发明的。

琼·亨利奇·兰伯特(1728 ~ 1777)在 1768 年发表过一篇论文,发展了棣莫弗的结果。他在这篇论文里引入了双曲正弦和双曲余弦,但在三年后才开始使用 \sinh 和 \cosh 的符号。他还写过一本关于画法几何的著作。他曾证明 π 是无理数,出版过一本 7 位对数表(1761)。他的著作有很高的价值,但和他的更辉煌的同时代人比较起来仍不免有所逊色。我们讨论到非欧几何时还要再提到兰伯特。

第十三章

从欧勒到拉格朗日

李昂纳德·欧勒(1703 ~ 1783)是 18 世纪最多产的一位数学家。尽管身体上有着严重疾患,但他几乎对每个数学分支都作了重要的贡献。他出生于巴塞尔,在那里进了大学,不久又得到伯努利家族的栽培,特别是丹尼尔·伯努利,他培养起欧勒对数学的兴趣。1741 年,欧勒应腓特烈大帝之命到了柏林,在那里一直留到 1766 年到圣彼得堡为止,这次则是由于凯瑟琳大帝的邀请。他的眼睛就是在他住在圣彼得堡的期间变瞎的,即便如此,他的论著仍未减少。他是一个有着非凡发明才能的人,他的研究工作几乎在数学的每个领域里都留下了永恒的标志。除了写给各种学会的几乎难以计数的研究报告和论文以外,欧勒至少还有五本主要论著丰富了数学这门学科,它们是:

1. *Introductio in Analysin Infinitorum*(《无穷小分析引论》),1748;
2. *Institutiones Calculi Differentialis*(《微分学原理》),1755;
3. *Institutiones Calculi Integralis*(《积分学原理》),1768 ~ 1770;
4. *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes, sive Solutio Problematis isoperimetrici*(《求证最大和最小值的曲线的方法,或等周问题的解答》),1741;
5. *Mechanica, sive Motus Scientia Analytice Exposita*(《力学,或运动学分析》),1736。

《无穷小分析引论》分为两篇,第一篇的目的是作为纯分析方法的一个入门,第二篇专论几何学。

第一章(《函数概论》)开始时对不同类型的函数作了精细的分类。一个任意变数的函数,被定义为由该变量与数字或常数一起以任意方式构成的一种解析表达式(*Functio quantitatis variabilis est expressio ana-*

lytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili, & numeris seu quantitatibus constantibus), 例如 $a + 3z$, $az - 4zz$, $az + \sqrt{(aa - zz)}$, c^z 乃是变量 z 的函数。函数被分为代数函数或超越函数, 前者又可分为有理函数和无理函数。有理函数又可进一步分为整式的和分式的。最后又区分出单值(一个值的)函数和多值函数, 后者对于变量的每个值可以取几个不同的值。

第四章(《用无穷级数解释函数》), 给无穷级数的问题注入了新生命。该章用两种方法来进行函数的展开: 一种是利用通常的代数运算, 例如:

$$\frac{a}{a + bz} = \frac{a}{a} - \frac{abz}{a^2} + \frac{ab^2z^2}{a^3} - \frac{ab^3z^3}{a^4} + \frac{ab^4z^4}{a^5} + \dots$$

再就是利用二项式定理, 例如:

$$\begin{aligned} (P + Q)^{\frac{1}{2}} &= P^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} P^{-\frac{1}{2}} Q - \frac{1 \times 1}{2 \times 4} P^{-\frac{3}{2}} Q^2 \\ &\quad + \frac{1 \times 1 \times 3}{2 \times 4 \times 6} P^{-\frac{5}{2}} Q^3 - \dots \\ (P + Q)^{-\frac{1}{2}} &= P^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} P^{-\frac{3}{2}} Q + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} P^{-\frac{5}{2}} Q^2 \\ &\quad - \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} P^{-\frac{7}{2}} Q^3 + \dots \\ (P + Q)^{\frac{1}{3}} &= P^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} P^{-\frac{2}{3}} Q - \frac{1 \times 2}{3 \times 6} P^{-\frac{5}{3}} Q^2 \\ &\quad + \frac{1 \times 2 \times 5}{3 \times 6 \times 9} P^{-\frac{8}{3}} Q^3 - \dots \end{aligned}$$

虽然欧勒设法得到了正确的结果, 但他处理这些级数的方法却是不仔细的。他认识到这些级数必须收敛, 但对收敛判定的建立没有太大留意, 因此他的例证中很少是今天可以接受的。

第六章讨论指数和对数(De Quantitatibus Exponentialibus ac Logarithmis)。对数是利用指数来定义的, 即若 $a^z = y$, 则 z 是 y 的对数(Quod si ergo fuerit $a^z = y$, erit $z = \log y$, ex quo intelligatur basin logarithmorum)。他在这方面的研究使得三角学发展成为分析学的一个分支。他确立了 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ 的关系(用符号 i 代表 $\sqrt{-1}$ 就是欧勒提出的)。他还给三角函数制定了今天所用的简写方法, 他认为三角函数是比值, 而不是长度。他给出了表示 $\tan^{-1} x$ 的级数, 并证明了 $\frac{\pi}{4} =$

$$5 \tan^{-1} \left(\frac{1}{7} \right) + 2 \tan^{-1} \left(\frac{3}{79} \right)。$$

第十六章引入了数分解 (De Partitione Numerorum) 的一个重要原理, 研究的是: 一个给定的正整数有多少分法可以分解成正整数之和, 例如 $8 = 8 = 7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3 = 5 + 2 + 1 = 4 + 3 + 1$ 。这就导致数论的研究。费尔马的那些较难的问题解决了, 开头一个问题是: 每个不管什么样的数, 均由不多于四个平方数的和组成。

第二篇是几何学, 其中详尽地说明了由二次方程定义的曲线的性质, 包括它们的渐近线、曲率中心等等性质, 然后继续讨论高次曲线。

《微分学原理》和《积分学原理》二书对当时的微积分方法作了最详尽、最有系统的解说。前者是从仅含一个变数的代数函数的微分开始, 以后又讨论了超越函数。接着是欧勒对二阶微分方程的研究, 以及对他所发明的 β 函数和 γ 函数的讨论。从下面摘自该书的几个式子可以明白他所用的符号:

$$\text{Si sit (若) } y = e^{nx}, \text{erit (则) } \frac{dy}{dx} = ne^{nx}$$

$$ddy \mid dx^2 = n^2 e^{nx}, d^3 \cdot 4 \sqrt{x} = \frac{3 \cdot 7 dx^3}{64 x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3}}$$

在《积分学原理》的前几章里发展了有限差分的理论。在这里也可以看到欧勒关于齐次函数的理论, 即若 z 是 x 和 y 的 n 次齐次函数, 则:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = nz$$

和他的老师一样, 欧勒也曾转而注意等周曲线的问题, 从而使他导向变分学。他在这个领域中的研究成果载于他的 *Methodus Invenien-di Lineas Curvas* (《求证曲线的方法》) 一书中, 以后表明, 这本书启发了拉格朗日。在该书的附录中, 欧勒考察了抛射体运动 (De Motu Projectorum), 并把他的研究推广到物体在阻尼介质中运动的情形。书中讨论了变分学, 发表了最小作用量原理。

欧勒还编过一本代数学论著 *Vollständige Anleitung zur Algebra* (《关于代数的全面的指南》, 1770)。书中包含有他对二项式定理的证明。他在这本书里大大丰富了关于各种方程的知识。由于求解五次方程的失败, 他转而研究确定近似解的方法。

当时, 在丹尼尔·伯努利的推动之下, 力学在 18 世纪上半叶取得了稳步的进展。这是一个实验活动大兴的时期, 而其结果是产生了一

些新的力学问题,特别是动力学方面的问题。但是,为应付提出的问题所运用的数学工具,却不是足够有力的,虽然棣莫弗和伯努利为了满足这个需要已经跨了一大步。

编写一本关于动力学的书,要在它的各个分支方面既完备而又有独创性,这样一件工作落到了欧勒身上。他在 1736 年写出了不朽的《力学,或运动学分析》。在这本书里他放弃了牛顿的几何方法,依靠更有力的分析处理方法,这就为拉格朗日的工作铺平了道路。欧勒在力学上的许多贡献都可以在柏林学院的记录中找到,这些贡献被看得如此重要,以至于人们都说,欧勒的力学对力学这门学科的贡献相当于笛卡儿的几何学对整个几何学的贡献,这个说法并不是没有理由的。

数学并没有把多才多艺的欧勒的精力全部吸引过去。他还编过一本重要的天文学著作,即 1744 年出版的 *Theoria Motuum Planetarum et Cometarum*(《行星和彗星的运动理论》)。继此之后又有 1753 年的 *Theoria Motus Lunaris*(《月球运动理论》)和 1772 年的 *Theoria Motuum Lunæ*(《月球运动理论》)以及 1771 年的 *Dioptricæ*(《屈光学》)。

18 世纪第一流的数学家是约瑟夫·路易斯·拉格朗日。他出生于都灵,19 岁时就在他的家乡出任炮兵学校的数学教授。1756 年,他曾把欧洲第一流数学家所提出的某些等周问题的一般解告诉给欧勒。^①他在证明的过程中发展了变分学,他的有关这个问题的论文马上使他被公认为欧洲第一流的数学家之一,那时他才不过 20 岁。1758 年,他创立了都灵科学院,并在 6 年中给它的期刊《都灵杂录》写了大量论文,所有这些论文都有极高的价值。这些论文涉及到微积分在物理学和天文学问题上的重要应用,以及像偏微分方程的解、数论、变分学这类题目。1764 年,他由于发表月球天平动的短论而荣获巴黎科学院的奖金,两年后又钻研木星的卫星运动这一艰深的问题,为此他又一次荣获科学院的奖金。

1766 年他应腓特烈大帝的诚恳邀请而来到柏林。他在那里居住了 20 年,在这段时期,他的作品浩如烟海。几乎不到一个月,柏林学院就因为他所写出的一些渊博论文而大为充实。除了上述题目之外,他还进一步研究了数论和方程论。大家记得,那时他正在编写他的不

^① 参见《都灵杂录》,第四卷,173 页。

朽名著 *Mécanique Analytique* (《分析力学》), 由此更可看出他的作品数量惊人。

他最有价值的一些贡献是在方程论方面。对于方程的解, 欧勒曾给以很大注意, 并引申出一种解四次方程的方法, 大大改进了笛卡儿和早期作者的方法。拉格朗日对这个问题的兴趣, 表现在他写给柏林学院的两篇渊博论文中。这两篇论文是 *Sur la Résolution des Équations Numériques* (《关于解数的方程》, 1767) 和 *Reflexions sur la Résolution Algébrique des Équations* (《关于方程的代数解法的研究》, 1771)。它们后来都被收在他的 *Traité de la Résolution des Équations Numérique de tous les Degrés* (《试论解任意次数的方程》, 1798 ~ 1808) 中。在这两篇论文里拉格朗日致力于寻找可解的条件。是否有一种普遍方法, 用它能把一个任意次数的方程化成次数较低的方程, 就像我们在四次方程的情形中所看到的那样呢? 拉格朗日在尝试回答这个问题时, 曾对前人用来解四次以下方程的全部方法进行了彻底的研究, 从而看出, 他们所用的全部手段都可归结为一种程序相同的方法。对于二次、三次或四次方程, 借助于一个低一次的“辅助”方程便可获得方程之解。但当我们把这个方法应用于方程

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

时, 辅助方程却是六次的。这就使他想到不可能求得四次以上方程的解, 但他似乎没有能断然确定这一点。事实上, 直到 1824 年才由阿贝尔补足了这个证明, 在此之前是没有证明的。然而, 拉格朗日在这方面的研究对于抽象代数的发展具有巨大价值, 因为这些研究导致后来由伽罗瓦精心建立起来的重要的群论。

拉格朗日对数论也有过浓厚的兴趣, 在这方面他有特殊的才能。他对费尔马所提出的一些问题作了解答, 包括求方程 $x^2 - ay^2 = 1$ 的全部整数解这个问题, 这里 a 是一个非平方数。他还证明了 π 的无理性。 π 也是超越数这件事是由林德曼在 1882 年证明的。

今天正在成为一个重要的科学研究方向的概率论, 也吸引过拉格朗日的注意。他在这方面的贡献载于《都灵杂录》的第五卷(1770 ~ 1783)中。在他的解说中自由地使用了微积分。他研究过误差理论, 他的论文 *Mémoire sur l'Utilité de la Méthode de prendre le Milieu entre les Résultats de plusieurs Observations... par le Calcul des Probabilités* (《关于根据概率计算……采用许多观察成果中的介质的方法》) 也许是拉普拉斯

发表《概率的分析理论》(1812)之前的最后一本第一流著作,从标题中可以看出这篇论文所涉及的范围。

拉格朗日在出任高等师范学校的数学教授(1794)之后不久,就出版了 *Théorie des Fonctions Analytiques* (《解析函数论》,1797)一书。和当时的许多其他数学家一样,他并不深信微积分所依据的那些原理无訾可议,因而试图给予这些原理以更高的严密性。他抛弃了牛顿的极限说,而从泰勒的定理出发,决定只使用代数方法。由于对级数的收敛性注意得不够,所以他的探索没有完全成功。但是,这件工作仍然表示出一定的进步。他在这方面的研究后来在他出任高等师范学校教授期间所发表的讲演中得到了进一步的发展。以后这些讲演又在1801年以 *Leçons sur le Calcul des Fonctions* (《函数计算讲义》)为名出版。毫无疑问,这些讲义对柯西是一个启发,柯西在20年后发表的重要著作 *Cours d'Analyse* (《分析教程》)为严密论证树立了一个榜样。

然而,拉格朗日最伟大的著作乃是 *Mécanique Analytique* (《分析力学》)。在这部论著里动力学这门科学登峰造极,可以毫不夸张地说,这本书奠定了现代力学的基础。它首次出版于1788年,拉格朗日在这四卷书中显示了变分学的充分力量和适应性,因为他借助变分学证明了力学这门科学整个可以建立在单独一个原理的基础之上,即最小作用量原理的基础之上。

拉格朗日证明了,牛顿关于物质和运动的种种变化多端的公设,都符合明显的自然界经济原理。这本书文字特别优雅,以至汉密尔顿说它是一部“科学诗篇”,后来又有一位作家说它把宇宙描写成为一个由数学和方程组成的有节奏的旋律。处理方法是分析方法。拉格朗日在序言中宣称道,力学现在已经成为分析学的分支,并且夸耀说书中连一幅图形都找不到。

虽然在这本伟大论著中已经可以看到他在力学上的主要贡献,但在《都灵杂录》的第三卷中还有关于力学的大量论文。他在这些论文中用许多例子概括地说明了他的原理。他还钻研过三体问题 (*Essai sur le Problème des Trois Corps*, 《试论三体问题》),为此他曾再次获得巴黎科学院的奖金。

拉格朗日的工作对于以后几个世纪中数学所遵循的路线有着深远的影响。在以后100多年的时间里,几乎没有什么发现不是直接和他的各种研究有联系的。他以严谨的态度对待他所研究的问题,同时

不仅严谨,而且有普遍性。和欧勒比较起来,他的作品虽然浩如烟海,但是远远赶不上他的前辈。那是因为欧勒几乎没有找到什么普遍方法,每个个别问题都要求用他自己的特殊解法。在发现专用的技巧方面,欧勒表明自己是一个无可匹敌的人。在任何地方,拉格朗日的概括才能都没有他在《分析力学》这部伟大著作中表现得那么明显,他在这本著作里把固体力学和流体力学这两个力学分支统一了起来,而在此以前,对它们所采取的方法是各不相同的。

当时,法国土地上复兴的气象正开始形成,巴黎再度成为数学教育中心,并且在后半世纪出现了一批法国数学家,他们对数学都留下了自己的贡献。拉普拉斯、勒让德、拉克罗克斯、柯西、泊松都遵循通常的方向,专心致力于分析学。但是与此同时也出现了一批离开分析学的数学家,他们给衰落中的几何方法注入了新生命。这个重要行动的先驱者是蒙日、卡诺和庞赛莱。我们不久就要谈到他们和他们的继承者的贡献。

帕爱莱·西蒙·拉普拉斯受教于诺曼底的博蒙特军事学校,后来便在那里教数学。1767年,主要是通过达兰贝尔的影响,他被任命为巴黎军事学校的数学教授。

和拉格朗日一样,拉普拉斯也是一位分析学大师。他把分析学应用到力学主要是天体力学的问题上,获得了某些惊人的成果。1773年他在法兰西学院宣读的一篇论文里宣布了行星运动的不变性。这是走向确立太阳系的稳定性的第一步。牛顿和其他一些人曾认为,由于考虑到作用力的多样性,太阳系不可能保持在持久平衡的状态。拉普拉斯在天文学上的发现最后发表在 *Mécanique Céleste* (《天体力学》五卷本,1799~1825)一书中,这是一部在权威和影响上都能与拉格朗日的《分析力学》相媲美的著作。用他自己的话来说,这部不朽著作的目的在于为由太阳系引起的力学问题提供一个完全的解答。该书一开始研究了旋转流体的平衡问题,关于这个问题,他在1773年到1817年就已经给学院写过几篇论文了。

拉普拉斯还写过几篇关于椭球体之间吸引力的论文。最重要一篇的题目是 *Théorie des Attractions des Sphéroïdes et de la Figure des Planetes* (《论球体的吸引及行星图》)。这篇论文是在1782年提出的,在 *Mécanique Céleste* (《天体力学》)的第三卷里也发表过。在这篇文章里他完全解决了一个球体与外部质点相互吸引这一普遍问题。这里我

们可以看到拉普拉斯关于势的概念和拉普拉斯方程。这篇著名论文即使孤立地看,也足以说明它的作者是一位不平凡的数学家了。

拉普拉斯的天才还表现在他对概率论的贡献上。他发表过一些这方面的论文,最后又被扩充成他的伟大著作 *Théorie Analytique des Probabilités* (《概率的分析理论》,1812)。这是一本不容易读的书,书中熟练地解释了概率论的解题方法,其中许多已经是早期作者发表过的。1814 年发表了一本容易读得多的解说,题为 *Éssai Phiosophique sur les Probabilités* (《关于概率的哲学研究》)。

阿得润·马利亚·勒让德(1752~1833)是拉普拉斯的同时代人,也是拉普拉斯的同胞。他在巴黎的 Mazarin 学院学过数学。他的最早一篇论文是研究阻尼介质中的抛射体运动的 (*Recherches sur la Trajectoire dans les Milieux Résistants*,《关于阻尼介质中的抛射体研究》),为此他获得了柏林学院的奖金。但更重要的也许是这样一个事实:这篇文章引起了达兰贝尔的注意,当时他正享有盛名,正是通过他的影响,勒让德才被任命为巴黎军事学校的数学教授。继这篇文章之后不久,他又发表了其他一些研究椭球体相互吸引的论文。这些论文立刻使他被公认为第一流的数学家。

勒让德曾在高等师范学校任教,他在那里对数论发生了强烈的兴趣。他的 *Essai sur la Théorie des Nombres* (《关于数论的研究》)一书发表于 1798 年,它是专门研究这个数学分支的第一本论著。这本书的第三版(1830)特别有价值,它和高斯的 *Disquisitiones Arithmeticae* (《算术研究》)同为这门学科中的标志性著作。书中阐述了二次互反律——高斯后来把它称做算术中的一颗明珠。早在 1785 年勒让德就已经把这个定律告诉给学院了。

勒让德的名字总是和他对椭圆积分的研究分不开的,他把一生中的黄金时代献给了这个问题。他研究这个问题的最早一批成果发表在 1786 年写成的论椭圆弧的两篇论文中。这两篇论文又被收集在他的最早一部主要著作 *Exercices du Calcul Intégral* (《积分学练习》,1811)的第一卷里。在这部书的第三卷中有一张精心制作的椭圆积分表,是他自己算出来的。他对这个问题的研究后来又在他的名著 *Traité des Fonctions Elliptiques* (《椭圆函数论》)中得到进一步的发挥和推敲。这本论著大约编成于 1830 年,但在两年后还未发表,当时阿贝尔和雅可比关于同一个题目的研究已经公诸于世了。勒让德马上承认后者更好,

并且毫不迟疑地这样说。勒让德的论述不管如何杰出和详尽,总还是不够十分简洁的。^①

勒让德的研究必然会导致变分学。1786年他发表了写给科学院的研究报告:*Mémoire sur la Manière de distinguer les Maxima des Minima dans le Calcul des Variations*(《关于在变分学中区分极大和极小的方法的报告》,1786)。如标题中所表明的,勒让德在报告中所研究的是建立判断极大极小的条件。欧勒曾在一个变数的情形下找到了必要条件。1755年勒让德在两个变数的情形下找到了这一条件。无论是欧勒还是拉格朗日,都没有把区分极大和极小的判定建立起来。这个问题在上述研究报告中首先为勒让德考虑到了。处理的方法虽然不无待改进之处,但仍足以鼓舞高斯、泊松、柯西、雅可比等人,使他们排除了疑难,进一步发展了这个科目。

勒让德对几何学也作了有价值的贡献。他在1794年编过一本叫*Éléments de Géométrie*(《几何学原理》)的书,其目的是用以代替欧几里得的《几何原本》。据说这本书曾对高斯有过影响。1787年,勒让德在一个为了用三角学测量连结格林尼治和巴黎而设立的委员会中被任命为委员。他在报告中有一个关于球面角盈表式的说明,现在被广泛应用于球面三角学中。

勒让德的工作,特别在分析学方面的工作,是有很高成就的。就他研究椭球体相互吸引的论文(*Sur l'Attraction des Sphéroides homogènes*,《关于椭球体的相互吸引》)来说,即使孤立地看,在那样光辉的时代也足以被认为是最伟大的人物了。

勒让德之后不久乃是萨伐斯特·法兰索斯·拉克罗克斯(1765~1843)。他在许多数学分支中也颇有成果。他的著作相当通俗,但在其中很难发现有什么独创性的贡献。在他那个时代的数学家中,他乃是一位由于勤奋而不是由于天才而获得一定名望的人。他最有名的一部著作是1797年的*Traité du Calcul Différentiel et Intégral*(《微分和积分论》)。从下面一件事可以看出它的重要性:它被译成了英文,致使剑桥的三位数学家皮科克、巴拜奇和赫歇尔把欧洲大陆上的方法和记号引进到英国来。在这本书里我们第一次碰到了微分系数、有限积分和无限积分等名词。

^① 参看附录二中关于椭圆函数的词条。

在这批优秀的法国数学家中,另一个值得注意的人物是奥格斯丁·路易斯·柯西。他也在工科大学学习过,并于1816年被任命为那里的数学教授。他第一次受到包括拉格朗日和拉普拉斯在内的同时代人的注意,是由于一系列日期记为1811年的精彩论文,当时他才不过22岁。在这些论文中有一篇是关于多面体理论的。他在该文中推广了那个虽然大家知道是笛卡儿提出的,但通常却归之于欧勒的定理,这个定理把多面体的顶点数、棱数和面数联系了起来: $E + 2 = F + V$ 。这就给其他数学家(包括拉格朗日在内)造成了一个好印象,从而鼓励了他继续进行研究。结果一篇篇论文接踵而来,它们涉及到函数论(他特别擅长这个数学分支)、微分方程、曲线求长和曲面求积、概率论和变分法,以及微积分在天文学和物理学问题上的应用。正是在一篇涉及到物理学问题的论文 *Mémoire sur la Théorie des Ondes* (《关于波动论的报告》,1815)中,他帮助证实了首次由惠更斯在100多年前宣布的光的波动说,为此他在第二年荣获了科学院的奖金。

和欧勒一样,柯西的著作几乎涉及到所有的数学分支。他的作品数量非常之多,除了数量非常巨大的论文之外,他还编写过三部论著,每部论著都对以后100年间的数学发展发生了深远的影响。这三部著作是:

1. *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique* (《国立工科大学的分析教程》),1821;

2. *Leçons données à l'École Polytechnique sur le Calcul infinitésimal* (《工科大学的微积分讲义》),1823;

3. *Applications du Calcul Infinitésimal à la Géométrie* (《微积分学在几何学中的应用》),1826~1828。

但是,他对数学发展最伟大的贡献在于他对这门学科采用了清楚、严谨的论述方式。他曾被认为是新思想家之首,这是一个恰当的评论,因为他如此热忱地专心致志于为微积分的基本原理奠定牢固的基础,以至这门学科在他手里留下了一个和他初次注意到它时大不相同的面貌。

《分析教程》一书的主要特点是对级数作了严谨的论述。这是一本价值很大的著作。柯西强调了确定收敛性的必要,并且想到了检验收敛性的方法,这些方法今天仍在使用(*Sur la Convergence des Séries*, 《关于级数的收敛》,1839)。这本书对泰勒定理有一个最早的完善证

明,并可看到人们熟知的余项形式^①。柯西还以正确的方法建立了极限和连续性的理论,并且重新引入了函数的积分乃是和的求极限过程这一观念。积分的这一说法曾被欧勒和其他人弄得稍微有点模糊,他们倾向于把积分过程仅仅看成是微分的逆运算。

柯西对复变数理论的发展曾给予大力注意,他对这个数学分支的贡献相当大。他的研究肇始于 1814 年的一篇论文,其中研究了极限是复数情形的有限积分的求值。^② 这篇论文事实上是一本内容丰富的论著,它对复变数理论的贡献堪与高斯的论著相媲美。

翌年,他由于证明了费尔马的一个最困难的问题而轰动数学界。他证明的是这样一个定理:凡正整数都是三个三角数、四个平方数、五个五边形数等等之和,亦即凡正整数要么是数列 $0, 1, 3, 6, 10, \dots$ 中的三个数,要么是数列 $0, 1, 4, 9, 16, \dots$ 中的四个数,要么是数列 $0, 1, 5, 10, 20, \dots$ 中的五个数之和。这个定理的证明曾使费尔马以来许多代的数学家大伤其脑筋。

对代换理论加以系统的研究是从柯西开始的,由此产生了有限阶群论。柯西也有一定资格被认为是有限阶群论的创始人。在纯粹代数中,他对方程论作过重要的贡献。他讨论过任意次方程的系数的对称函数,发表并证明过以他的名字命名的一个定理。^③ 他确定了方程的实根和虚根,并精心地证明了代数基本定理,即每个任意系数(实数或复数)的方程至少有一个形如 $a + ib$ 的根,这里 a 和 b 为实数。^④ 他还提出了一种求任意次方程的近似根的方法。他在 *Journal de l'École Polytechnique* (《工科大学杂志》) 的第十卷中讨论了行列式的问题,在那里证明了几个关于行列式的重要定理。

据估计,柯西在他一生的最后 20 年里,共写出了 500 篇以上的论文,讨论到不同的数学分支,其中包括力学和数学天文学。这些论文都散见于各种杂志中,包括 *Comptes Rendus* (《汇编》) 和由他自己负责的一份杂志,即 1826 ~ 1830 年的 *Exercices de Mathématiques* (《数学演

① 参见柯西 *Sur le Développement du Reste qui complète la Série de Taylor en une Série Nouvelle* (《讨论余数使泰勒级数完善成为一种新的级数》), 1841。

② 参见柯西 *Sur les Intégrales définies prises entre des Limites imaginaires* (《关于在虚数范围中获得的有限积分》), 1825。

③ 参看 Burnside and Panton, *Theory of Equations*, 第三版, 242 页。

④ 这个定理的证明曾由高斯在 1799 年提出过。

习》)。其中有一篇(1826)说明了怎样用计算残数的方法来解决物理数学问题。

在这段时期,法国另一位第一流的分析学家是西蒙·丹尼斯·泊松。他也是在工科大学受教育的,并在那里得到拉格朗日和拉普拉斯的注意。他年仅18岁时就发表了一篇关于有限差分的论文,因此得到勒让德的注意。泊松一共写过300篇论文,主要是讨论磁学和电学中的数学理论。他的一部值得纪念的论著是 *Traité de Mécanique* (《力学》,1811 和 1833),其中包含有他研究弹性问题的结果。

在这段才华焕发的时期以后,法国数学学派经历了一段衰微期,不久就不得不在数学发展中居于次要地位。但在衰微开始之前,已有一群法国数学家离开了分析学,开始对几何方法恢复了兴趣。在这些人的著作中可以看得出近世几何之开端。这个新数学分支的先驱者是蒙日、庞赛莱和卡诺。我们现在就转过来考察他们的工作。

第十四章

近代几何之开端

我们曾看到,18世纪的数学家非常爱好分析方法,但是,人们也开始在探索由笛卡儿和德扎尔格所开辟出来的广大领域。在几何学特别是在德扎尔格的射影方法方面,18世纪后半叶堪称一个蔚为壮观的复兴时期。这主要归功于三位法国数学家:蒙日、卡诺和庞赛莱。他们不都是同时代的人,但是,他们的工作却有很多共同之处。

伽斯帕·蒙日在1768年便成为 *Mézière* 军事工程学院的数学教授,他对画法几何的兴趣就是在那里产生的。他曾被分配一项任务:制定梅斯城的建筑方案。正是在担负这项工作的时候,他和一种新型的几何学即画法几何打上了交道。画法几何的方法就是把立体和其他三维的图形表示在平面上,就蒙日这个对空间关系具有惊人想像能力的人说来,这种方法的产生是很自然的。他对这门学科最早的贡献见于1781年他提交给巴黎科学院的一篇论文中。1794年他被任命为工科大学的数学教授,在那里立刻开始了一系列关于画法几何的演讲。这些演讲以后都收集在他于1794年出版的 *Lecons de Géométrie Descriptive* (《画法几何讲义》)一书中。在这些演讲里,他发表了透视的理论,并且利用向三个面作垂直投影的方法导出了各种面的性质。蒙日还写过一些画法几何的论文,以后又扩充成 *Géométrie Descriptive* (《画法几何》)一书。该书出版于1800年。

蒙日也写过一些关于微分方程,包括偏微分方程的有价值的论文,其中有许多收集在 *Application de l'Algèbre à la Géométrie* (《应用于几何学的代数》,1805)和 *Application de l'Analyse à la Géométrie des Surfaces du 1^{er} et 2^e Degré* (《应用于一次和二次曲面上的几何学的分析》,1819)中。后者是最早发表的一本关于微分几何的著作。蒙日在1785年的

一篇论文中还用微积分来研究曲率问题,并且在某些方面预见到高斯在这个问题上的贡献。他还编过一本关于静力学的书 *Traité Élémentaire de Statique* (《静力学引论》,1788)。

但是,他的声誉却是靠他在几何方面的工作。由于他的鼓励,新的几何方法便开始在新成立的工科大学中开花结果,对以后 19 世纪的发展有着深远的影响。

L.N.M. 卡诺(1753 ~ 1823)是蒙日的一位比较年轻的同时代人。他是一位工程师,最早一部著作是 *Éssai sur les Machines en Général* (《一般机器概论》,1786),接着这以后的是 *Corrélation des Figures de Géométrie* (《各种几何图形的相互关系》,1801)。然而他的杰作是 *Géométrie de Position* (《位置几何》,1803)。他在这本书里开辟出了一个全新的园地,导出了我们熟知的完全四边形和完全四角形的性质。他检查并且推广了马克劳林关于截线的工作,试图证明射影几何方法的力量并不亚于笛卡儿所首创的方法。卡诺还写过一本 *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal* (《关于微积分的形而上学研究》,1797)。

J.V. 庞赛莱(1788 ~ 1867)是蒙日的学生,对导师的几何方法颇有感悟。他也是避开了分析方法,给纯粹的几何方法注入了新的生命力。他注意到,平面图形的一些度量性质(例如两点之间的距离、两直线之间的夹角)在投影时虽然有所变化,但总还有某些其他的性质保持不变,因而他在研究这些时依靠了“交比”的观念。人们早就知道,如果四条相交于一点的直线被一截线所割,截点分别是 A, B, C, D , 则比值 $AB:BC$ 与比值 $AD:DC$ 之比保持不变,表达式 $\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DA}$ 称为点列的反调和比或交比。从以上可以看出,任何四点的交比不因射影而改变,这导致庞赛莱出版了他的 *Traité des Propriétés Projectives des Figures* (《论几何图形的投影性质》,1822)一书。它所研究的是那些在射影时保持不变的性质。书中论述了交比、透视、对合和圆上虚渺点等基本观念。在这本书里面,庞赛莱精心构思出了连续性原理,他是由于发明了圆上虚渺点而得到这个原理的。他的许多发现都已发表在 1806 年克列勒所创办的杂志中。为了导出几何图形的许多重要性质,庞赛莱自由地使用了射影和对偶。

这些人的贡献给予近代综合几何一次大大的推动。这些贡献导致斯坦纳、普吕克和日尔岗诺在一方面的和凯利和冯·史陶特在另一

方面的极其重要的研究。

与新几何方法的发展同时发生的,是对传统几何的基本原理加以严格的考查。自从托勒密企图证明著名的平行公理以来,一直没有什么真正的挑战是针对欧几里得几何的。但是,使分析学建立起严密性来的那种批判性见解,如今也波及几何学。数学家到这时已开始带着怀疑的情绪来看待欧几里得公理所确定的空间唯一性,但是还未有人想去探索创立另外一种几何系统的可能性。

欧几里得把他的宏大结构建筑在某些他认为是不证自明的真理上。其中之一就是著名的平行公理,我们记得,这个公理是说:“如果一条直线落在另外两条直线上,且在割线一侧所成之两内角之和小于二直角,那么,只要在小于二直角的这两个内角所在的割线那一侧延长这两条直线,它们就会相交。”如今对这个公理的真假性不管坚持怎样的观点,事实总归是:它并非不证自明。正是由于认识到了这个事实,才使得人们重新试图用另一个不包含这个可疑公理的几何系统来代替古典的欧几里得几何。

在为了澄清平行公理有效与否而作的最初的种种尝试当中,有一个是萨开里(1667~1735)提出的。他在 *Euclides ab omni Nævo Vindictus* (《除去欧几里得所有的污点》,1733)一书中相信:由于平行公理的可疑情况,他已经“辩明了欧几里得所有的污点”。他从直线 AB 的两端垂直地作两条相等的垂线 AX, BY , 并着手证明, AXY, BXY 两个角都一定是直角。他用归谬法证明了这点。无论是假定这两个角都大于直角(钝角假设),或是假定它们都小于直角(锐角假设),得到的结论都和欧几里得的其他公理相矛盾。因此萨开里认为,这两个假定都要放弃。萨开里至死都确信,他已经改换了欧几里得《几何原本》的基础。他没能了解这样一件事:从这两个假设中随便哪一个出发,都可以作出前后完全一致的结论。然而,萨开里的研究仍被证明是极其有益的。他的结论曾遭到兰伯特(1728~1777)的诘难,后者证明了,钝角假设在球的大圆之间的球面上可以成立,只要把 AB, BY, YX, XA 诸线段看成是这些大圆上的圆弧;同时他也不怀疑完全可以找到一个曲面,使得另一假设(即锐角假设)也在它上面能成立。勒让德在其 *Éléments de Géométrie* (《几何学原理》)中曾经作过一次“证明”平行公理的尝试,企图证明它是其他公理的推论,而这些其他的公理没有一个值得怀疑。虽然他的证明失败了,但却鼓舞了其他人去发明一种不需

要这个有疑问的平行公理的几何系统。从新近出版的高斯的日记中可以看出,高斯早在 1816 年就已经考虑到发展这样一种几何学的可能性:它既可以避免平行公理,又可以像欧几里得几何那样地本身相容。但他关于这个问题没有发表过任何东西。关于非欧度量空间的研究,最早发表的东西是由罗巴切夫斯基(1793 ~ 1856)提出的。他在 *Geometrie Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* (《平行线理论的几何研究》,1840)这部论著中认为,欧几里得的平行公理并不是建立几何系统所不可缺少的条件,他大胆地说,这个公理完全可以用下列说法来代替:设在平面上有一直线,并在其外有一点。在从这个给定点射出的所有直线中,有些和给定的直线相交,还有些和它不相交。分开这两类直线的是一条界线,这条界线就称为与给定直线平行的线。因此,通过任一给定点存在有两条直线和给定的直线平行,其中每条都和给定的直线相交于无穷远。这样一来,一条直线在无穷远处就有两个特殊点。这立刻就把罗巴切夫斯基带进了和德扎尔格的观念相矛盾的境地。我们记得,德扎尔格是首先引进无穷远处的元素这个观念的。德扎尔格一直认为,在每条直线上有一点且只有一点处在无穷远,这一点乃是和给定直线平行而不和其他直线平行的所有直线的公共点,如有两条直线只在无穷远点相遇,它们就是平行的。罗巴切夫斯基论证了,利用他的假定可以创立一个并不自相矛盾的几何系统。在罗巴切夫斯基之后,匈牙利的鲍耶也独立地研究了这个问题,但无论是罗巴切夫斯基的工作或是鲍耶的工作,都没有引起很大注意,直到德国的黎曼和英国的凯利,这种研究才开始引起注意。

黎曼的系统和欧几里得系统的差别,同任何前人的几何系统比较起来带有更加根本的性质。现在大家都承认,这样一种完全合乎逻辑的几何系统是可以建立起来的:其中任何两条直线,即使它们和一条截线所构成的两内角之和小于二直角,也可以不相交。黎曼假定所有的直线都是无界的,但其长度有限。要理解这一点,我们只要把直线看成是首尾相连的,就像一个圆的圆周那样。因此,一点沿一直线移动时,最后要回到它的出发点上来。应当指出,罗巴切夫斯基觉得这个观念是完全不可能接受的。在黎曼所想像的那种空间里,要通过给定点作一直线不和另一直线相交,乃是不可能的,就像球面上大圆圆弧的情形那样,我们所能做到的,只是把一条线延长到足够远。这就导致罗巴切夫斯基得出如下结论:球面几何乃是不包含平行公理的一

种欧几里得几何,他认为只要修改一下欧几里得的公理 1 和 2 以及平行公理,萨开里的钝角假设就可以是正确的。我们记得,这两条公理是说连两点可以作一直线,而且一直线可以向两端无限延长。黎曼建议作如下的修改:

1. 任何两点确定一直线。
2. 直线是无界的。
3. 平面上任何两条直线,只要延长到足够远就可相遇。

黎曼的研究导致这样一种想法:有三种不同的几何学,它们的差别只是在于通过给定一点向给定一直线所能作的平行线的条数这一点上。只能作一条平行线的,就是大家所熟知的欧几里得几何;如果一条都不能作出,那就是一种新型的几何,叫做椭圆型几何;但如果可以作出一束平行线,具有同一的角度,那就得到第三种类型的几何学,可以把它叫做双曲型几何。只有在椭圆型几何中,直线才有有限的长度,在其他两种几何里,任何两条直线只要完全落在同一个面上,它们就会相交。在这样的面上所作的三角形,其内角之和大于二直角;在双曲型几何中,三角形内角之和则不足二直角。

黎曼的结论曾得到 E. 贝特拉米(1835 ~ 1900)、索菲斯·李(1842 ~ 1899)、奥瑟尔·凯利(1821 ~ 1895)、菲力克斯·克莱因(1845 ~ 1925)和晚近的阿尔富雷·诺士·怀特黑等人的严格检查。但要考虑他们的研究结果已是超出本书范围的事了。

第十五章 算术——数学中的女王

在数学史上很少有哪个时期可以和我们现在所要考察的时期相比。此外,无论就其获得决定性的承认,或者就如此之多的全新的数学部门得到发展来说,19 世纪都是一个无与伦比的时期。再有,在这个时期可以看到数学的范围大大拓宽了,因为它在物理和天文问题上的应用日益增长。法国革命,接着是拿破仑战争,给数学的发展创造了有利的条件。在这个国家,工业革命曾刺激了人们对数学的实际应用的兴趣,工程师的要求有力地反映到力学这门学科上。为了跟得上这个迅速前进的步伐,各学校和大学都进行了改革,并成立了新的学会。1795 年成立的工科大学就是其中的一个例子,它在数学史上的重要性可从下一事实估计到:在它的教师队伍中包括拉格朗日、拉普拉斯、蒙日这样一些光辉的名字。

到 18 世纪末,法兰西的土地上已经取得了最大的进展。然而,随着 19 世纪的到来,德国很快跃居首位。但当这个世纪继续前进时,可以看出前景有所变化。数学逐渐变得更加专门化起来,更加脱离经济生活的需要了。学者们现在已开始培养起为数学而研究数学的兴趣,尤其是在数学的各个分支中对严密性有了更高的要求。

这个时期最伟大的数学家是卡尔·弗里得利希·高斯。事实上,他也是所有时代最伟大的数学家之一。高斯在 1777 年生于不伦瑞克,并在故乡的卡洛纳公学开始受教育。在很年幼的时候他就对数学产生了兴趣。当他还是一个学生的时候,就不仅掌握了二项式定理,而且还认识到,如果不加鉴别地使用它就会导致荒谬的结论。在 $(1+x)^n$ 的展开式中,若 n 不是正整数,则此展开式便是一无穷级数,在这种情形下,必须附加某些限制才能保证级数收敛于一有限的极限。在

高斯之前,人们对这类级数的处理,会使一个现代的人觉得极为轻率,当时可以毫不费力地找到这样一位数学家:他把 $\frac{1}{1+x}$ 或 $(1+x)^{-1}$ 展开,再令 x 等于1,便得到下列荒谬结论:

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \text{至无穷}$$

这件事启发了高斯,使他在他的全部工作中追求严密性,并使他的继承者深深感到严密性是重要的。高斯在离开大学以前就已经引申出最小二乘法^①了,利用这种方法可以从大量不一致的观测中把一个变量的最恰当的数值估计出来。

1795年,高斯进入哥廷根大学,他在那里度过的三年是他一生中最多产最有成果的时期。他虽然对数学有着浓厚兴趣,但在大学的前一两年,在古典文学的研究上也大有拔类超群显赫成名的希望。然而在1796年,还不到20岁的时候,他的注意力就集中于研究用尺规方法作一个 n 边正多边形的可能性问题了。希腊人已经知道如何在 n 是3,4,5的情况下作出这些图形,或者利用累次二等分边的方法从这些图形推演出一些图形来。但是高斯给自己提出的问题是:要确定 n 该取什么值以及不该取什么值才能作图。他的成功使他如此得意,以至他决定放弃古典文学的研究而一心钻研数学。从最近才发现的他的笔记中可以清楚地看出,除了许多其他的研究之外,他当时还在酝酿他的伟大论著 *Disquisitiones Arithmeticae* (《算术研究》)。这本书最后是在1801年出版的。他曾想到证明二次互反律的方法,这个定律以前曾由欧拉和拉格朗日预示过。

1799年高斯作出了他的博士论文。他的论文是: *Demonstratio nova Theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in Factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse* (《所有单变数的有理代数函数都可分解成一次或二次的因式这一定理的新证明》)。这个定理通常被看成是代数中的基本定理,它相当于如下的说法:所有形如

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

的、其系数为任意实数或复数的方程,至少有一个根 $a+ib$,这里 a, b 是实数, $i = \sqrt{-1}$;或者更简单地说,所有含一个未知数的方程都有一

^① 参看附录二。

个根。高斯正是在这个证明过程中确定了复数的地位的,所有的数都具有 $a + ib$ 的形式。拉格朗日以前曾给这个定理提出过一个证明,但有些缺点。高斯自己在其证明中也留下了一个漏洞,虽然他答应以后再来弥补它,但是没有证据说明他这样做了。他曾认为,连续函数如果不在某些地方为零的话,就不可能在某些地方是正而在某些地方又是负的。虽然如此,这个定理还是有关方程论的一系列深刻研究的出发点。柯西曾确立过 n 次方程有 n 个根的定理。1835 年史笃姆曾发现一种方法,能在指定的数值范围内确定一个方程的实根数目。在此前几年,阿贝尔在研究方程的可解条件时,证明了求五次方程的一般解是不可能的。这方面最惊人的进步是来自伽罗瓦,他大约在 1830 年左右引入了群的概念。

高斯的主要兴趣是在算术或者说是数论方面。他的《算术研究》这部算术杰作早在 18 世纪末就完成了,但是直到 1801 年才发表。这部著作给数论的研究揭开了一个新纪元,在以后 100 年左右的时间里,这个领域中几乎没有什么发现是不能直接追溯到高斯的研究那里去的。

在序言中,高斯谦虚地解释了该书的意图。“这本书所包含的研究结果,是属于这样一部分数学:它所考察的多半是分数和整数,总是把无理数排斥在外。”^①该书共有七部分,第一部分专论同余式理论。同余式是用这样一些话来定义的:“如果数 a 可以除尽 b, c 二数之差,我们就说 b, c 对于 a 是同余的,否则就说是非同余的。 a 称为模,在前一情形下 b 和 c 二数中每个数称为另一数的剩余,在下一情形中则称为非剩余。”^②

这些数可正可负。例如,23 和 5 对于模 6 是同余的,因为 6 正好可以除尽 23 与 5 之差;23 和 8 也是同余的,模是 15,因为 $23 - 8$ 可被 15 除尽,并且(援引的是高斯自己的例子), -9 和 16 对于模 5 是同余的;对于模 11, -7 是 15 的剩余,而对于模 3 则是非剩余。在第一章中引入了高斯的特有记法:“今后我将用符号‘ \equiv ’来表示两个数的同余

① Disquisitiones in hoc opere contentæ ad eam Matheseos partem pertinent, quæ circa numeros integros versatur, fractis plerumque, surdis semper exclusis.

② Si numerus a numerorum b, c differentiam metitur, b et c secundum a congrui dicuntur, sin minus, incongrui; ipsum a modulum appellamus. Uterque numerorum b, c priori in casu alterius residuum, in posteriori vero nonresiduum vocatur.

式,模则放在括弧内,如 $-16 \equiv 9 \pmod{5}$, $-7 \equiv 15 \pmod{11}$ 。”他解释说,他是由代数等式和同余式或算术可除性之间的密切类似得到启发而采用这个符号的。接着说明了同余式的各种性质,例如:

1. 已知数 $a \pmod{m}$ 的所有剩余都取 $a + km$ 的形式。

2. 设有 m 个连续数 $a, a+1, a+2, \dots, a+m-1$ 和另一数 A 。前者之中必有一数对于模 m 和 A 同余的,并且只有一个这样的数和 A 同余。

例如,若 $m=7, A$ 是 15, 这串数是

$$6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$$

则其中第三个数 8 是和 15 同余的,并且它是唯一和 15 同余的数。

该书第二部分是讨论一次同余式,第三部分讨论幂的剩余。这里我们可以看到对费尔马定理的解答。这个定理是说,若 p 是素数, a 是任一和 p 互素的数,则 $a^{p-1} - 1$ 可被 p 整除,即 $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ 。例如当 $p=7, a=3$ 时, $3^6 - 1$ 即 728 可被 7 整除,用高斯的话来说就是, $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$ 。

第四部分介绍了二次同余式,阐述了二次剩余和二次非剩余。如果 p 是一个奇素数, a 不是 p 的倍数,则当有任一数 x 使得 $x^2 \equiv a \pmod{p}$, 亦即使 p 恰可除尽 $x^2 - a$ 时,我们就称数 a 是 p 的一个二次剩余,否则便是二次非剩余。其另一说法是:如果 a 是 p 的二次剩余,我们就至少能找到一个 x , 使得它的平方在被 p 来除时,余数是 a 。例如 13 是 17 的二次剩余,因为 $x^2 \equiv 13 \pmod{17}$ 是成立的,这只要 x 取值 8 (还可取其他一些值)。另一方面, 5 是 17 的二次非剩余,因为我们不可能找到 x 的一个整数值,使得 $x^2 - 5$ 恰可被 17 所除尽,亦即 $x^2 \equiv 5 \pmod{17}$ 是不可解的。

在讨论二次剩余时,有两个基本问题。第一个问题:一个给定的素数 m 的二次剩余和二次非剩余是什么? 这个问题的另一提法是:在同余式 $x^2 \equiv r \pmod{m}$ 中,当 x 取 $1, 2, 3, \dots$ 的值时, r 能取哪些值,不能取哪些值? 第二个基本问题是:对于哪些素数模 p , 给定的数 a 是二次剩余或二次非剩余? 在高斯所证明过的命题中有下面这样一个命题:无论取作模的是怎样一个数 m , 在数列 $1, 2, 3, \dots, (m-1)$ 中不可能有多于 $\frac{1}{2}m + 1$ 个数 (m 是偶数时) 或多于 $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}$ 个数 (m 是奇数时) 与一平方数同余。例如,若模是 13, 则 0, 1, 2 等数平方的最小剩余可表示如下:

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
平方	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
最小剩余	0	1	4	9	3	12	10	10	12	3	9	4	1

我们看到,从第7项以后,最后一行中的数字又按相反次序重复出现。这一点的另一说法是:如果把 p 取作模,则 $1, 2, 3, \dots, (p-1)$ 诸数中有一半是二次剩余,而另一半是二次非剩余。例如,

模	剩 余
3	1
5	1, 4
7	1, 2, 4
11	1, 3, 4, 5, 9
13	1, 3, 4, 9, 10, 12
17	1, 2, 4, 8, 9, 13, 10, 16, ...

还有, -1 是所有形如 $4n+1$ 的素数的剩余,是形如 $4n+3$ 的素数的非剩余。例如容易证明, -1 是 $5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97$ 等的剩余,并且是 $3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, 79, 83$ 等的非剩余。所有这些都导致了那个使高斯着迷的定理,他把它叫做“黄金定理”,这就是以前曾由欧勒在 1783 年发现过,后来又引起勒让德注意的二次互反律^①。我们到以后再来讨论这个定律。

《算术研究》的第五部分是讨论二元二次形式的理论。这方面的一个一般性问题是,求出满足下列不定方程的 x 和 y 的整数值:

$$ax^2 + 2hxy + cy^2 = n$$

式中 a, h, c, n 都是给定的整数。在下一部分又被推广到求下列三元二次形式的整数解:

$$ax^2 + 2hxy + cy^2 + 2dx + 2ey + fz^2 = m$$

最后一部分有时被人们认为是全书之精华,标题是 *De Aequationibus circuli sectiones definientibus* (《论等分圆周方程》)。这部分所研究的是把一个圆周分成若干等份的问题,亦即作 n 边正多边形的问题,这在代数中相当于确定方程 $x^n - 1 = 0$ 的根。

希腊人已经知道用尺规方法可以作出正三边形、正四边形和正五边形,或者利用累次二等分边的方法从这些图形推出某些多边形来。

^① 参看附录二。

容易证明,当 $n = 2^m \cdot 3 \cdot 5$ 时,完全可以用欧几里得方法来作 n 边的正多边形(即将圆周分成 n 等份),但这并不包括所有的可能情形。18 世纪期间人们对于 n 不符合这个一般公式的情形产生了巨大的兴趣。拉格朗日和勒让德两人对这个问题曾给以相当注意,但在这方面获得最伟大发现的,乃是高斯。高斯在 1796 年证明了用直尺和圆规可以作出正 17 边形。他又推广了这个结论,证明了:当 $n = 2^{2^m} + 1$ 时,只要 n 是素数,作图就总是可能的。在此公式中分别令 $m = 0, 1, 2, 3, 4$,便可得到满足这个条件的最小的 n 值,例如:

$m = 0$	$n = 3$
$m = 1$	$n = 5$
$m = 2$	$n = 17$
$m = 3$	$n = 257$
$m = 4$	$n = 65\,537$

它们全都是素数。这个数列中的下一个 n 值由 $2^{32} + 1$ 给出,是 4 294 967 297,它不是素数,其因数是 641 和 6 700 417。同样, $m = 6, 7, 8$ 等数导致非素数的 n 值,因此在这些情形下作图是不可能的。

高斯在这部分的一开头宣称道:“作为这一部分之内容的圆周分割理论或正多边形的作图理论,并不完全属于算术的内容……但是对几何学家说来,这些结果和由此发展起来的新真理同样令人感到意外,我希望他们能愉快地加以理解。”

正多边形的作图或把圆周分成若干等份(亦即作一个等于 $\frac{2\pi}{n}$ 的角)的问题,相当于解方程 $x^n = 1$ 。这方程给出 $x = 1^{\frac{1}{n}}$,它等于 $(\cos 0 + i \sin 0)^{\frac{1}{n}}$,或者更一般地说,等于 $(\cos 2s\pi + i \sin 2s\pi)^{\frac{1}{n}}$,这里 s 取 $0, 1, 2, \dots, (n-1)$ 的值。由棣莫弗定理,右端是 $\cos\left(\frac{2s\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2s\pi}{n}\right)$ 。例如,当 $n = 3$ 时,在上式中分别令 $s = 0, 1, 2$ 就可得到 x 的值。用这种方法可以求得 1 的三个立方根为:

$$\begin{aligned} & \cos 0 + i \sin 0 \\ & \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \\ & \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

即 $1, -\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}), -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$, 以后的值是重复的。同理, 对于 $n=4, x$ 的值是

$$\begin{aligned} & \cos 0 + i \sin 0 \\ & \cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4} \\ & \cos \frac{4\pi}{4} + i \sin \frac{4\pi}{4} \\ & \cos \frac{6\pi}{4} + i \sin \frac{6\pi}{4} \end{aligned}$$

即 $1, i, -1, -i$ 这就是 1 的 4 个四次方根。现在假定我们想要用几何方法把 1 的所有 n 次方根表示出来。画一单位圆 APA' , 直径是 AOA' 。如果 P 是圆周上一点, 使得角 AOP 是 θ , 则 P 可表示如下:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)$$

现在, 设此圆周在点 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ 处被分成 n 等份, 于是角 AOA_1 是 $\frac{2\pi}{n}$, AOA_2 是 $\frac{4\pi}{n}$ ……由此可以看出点 A_1, A_2, \dots 就表示单位 1 的所有 n 次方根。

《算术研究》立即使高斯置身于第一流的数学家之列。它开启了数论领域的一个热烈活动的时期, 激励了爱森斯坦、库麦尔、狄德金、克罗内克这样一些人, 这还只是少数几个名字。高斯对这本书可能还计划有第八部分。在处理后二次剩余以后他要把研究结果推广到 $x^4 \equiv m \pmod{p}$ 的情形, 这是自然的。他对相应互反律(双二次互反律)的探索导致他去研究复数, 即形如 $a + bi$ 的数。这个问题所要求的研究方法, 和他在二次互反律情形下导致那些惊人结果所用的方法完全不同。虽然如此, 依靠这种新数, 他还是在 1830 年左右建立了他所寻求的结果。三次互反律是由他的学生 F.G.M. 爱森斯坦建立起来的。高斯对复数的研究澄清了算术中长久以来一直模糊不清的一系列问题, 此外, 他还修改了区分素数与合数的方法。例如, 5 这个简单的素数从此以后就被看成是 $1 + 2i$ 和 $1 - 2i$ 两个因数的乘积。高斯说明了怎样能在平面上而非在直线上把复数表示出来, 从而消除了围绕着复数的许多神秘之点。不幸的是, 有些神秘之点仍然存在着。

在高斯去世以后多年, 人们发现了他所用过的一些笔记本。这些笔记本在 20 世纪开始之前不久发表了出来, 它们揭露出这样一个事实: 高斯除了在自己特殊的领域即数论里是一位大师以外, 他还是许

多其他数学分支中的先驱者。例如可以清楚地看到,早在罗巴切夫斯基的著作发表之前很久,他就已经开始怀疑欧几里得论证的可靠性了。事实上,他已经计划好一种无矛盾的几何系统,它不需要欧几里得关于平行线的公设。这些笔记还表明他已解决了费尔马关于数论的一些问题,但始终未予发表。其中包括这样一个定理:所有形如 $8n+3$ 的数都是三个奇平方数之和。通常归功于勒让德的那个“椭圆函数是双周期函数”的发现,在高斯的笔记中也有,同时高斯对行列式也作了些精深博大的议论。高斯对超几何级数的研究是在 1812 年,级数的各项是

$$1 + \frac{ab}{c} \cdot x + \frac{a(a+1)(b+1)}{c(c+1)} \cdot \frac{x^2}{2!} + \\ \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)} \cdot \frac{x^3}{3!}$$

这是值得注意的一件事,因为这是对级数性质的最早一次系统研究,而且对于保证级数收敛所必须附加的限制也讨论到了。

但是,在那个光辉的时代高斯之所以堪称为一位伟大的人物,并不仅仅由于他在数学方面的研究。他在与数学有关的几个领域特别是在天文学中的发现,就足以使他声名不朽了。他对天文学的兴趣是从 1801 年发现一个新的叫谷神星的小行星开始的。高斯根据极少数可资利用的观测材料,准确地算出了谷神星的轨道,这使他出版了著名的 *Theoria Motus Corporum Cœlestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium* (《关于太阳圆周曲线的天体运动理论》) 一书,在此以后不久又发表了一篇关于椭球体相互吸引理论的精深论文。在 1830 年左右他又转而注意磁学和电学。他在这方面的成就记载在他的 *Resultate aus den Beobachtungen des Magnetischen Vereins* (《对磁的组织的观察得到的结果》, 1836 ~ 1841) 一书中。

除了上面提到的著作以外,他还写过大量的论文。他是现代数学分析的一位大师,他对严密性的强调给他的继承者树立了榜样。在综述他的数学成就时还可以再提到:他得心应手地运用了虚数,消除了长久以来有关虚数的模糊之点;他研究过行列式,而且发明了统计研究中如此有用的最小二乘法;他看出了椭圆函数的双周期性,对数论作出了不朽的贡献。

H.J.S. 史密斯(1826 ~ 1883)是高斯在数论方面最伟大的继承者之

一,他在《关于数论历史的报告》^① 中认为高斯是数论科学的大师。他把高斯的 *Eisenstein Mathematische Abhandlungen* (《爱森斯坦的数学论文》,1847)的序言翻译成这样一些话:

“在我们面前,比较高深的算术呈现为一个内有种种有趣真理的无尽的贮藏库,而且,这些真理之间并非孤立的而是有密切联系的。随着我们知识的增长,我们在它们之间会不断发现一些新的,有时是完全意料不到的联系纽带。它的大部分理论之所以特别诱人,是由于具有下列特点:有些使人觉得简单明了的重要命题,往往不难靠归纳方法发现,可是它们却有如此深奥的性质,以致经过许多徒劳的尝试以后仍然无法加以证明,甚至在我们能够证明的时候,也往往需要一些冗长的不自然的步骤,比较简单的方法则可能长期找不到。”

我们不打算追溯 19 世纪头几十年以后的数学发展。由于高斯进行了各种各样的研究,数学已经变得越来越高度专门化了,因此我们只限于指出一些重要的发展方向以及与此有关的一些人的名字。

蒙日所创始的新几何方法后来成了非常流行的方法,并且引起了几个很有名的数学家的注意。冯·史陶特(1788~1867)和约可伯·斯坦纳(1796~1863)大力推动了射影方法的研究。前者曾开始把几何学非度量化,并使之完全射影化,这是他在 1847 年出版 *Geometrie der Lage* (《位置几何》)一书的目的。斯坦纳也离开了分析方法,使用纯粹综合的方法在几何上得到了某些显著成果。他在 1832 年出版了一本论著^②,目的在于系统地发展各种几何形式之间的相互依赖关系。第二年他又出版了一本论“可借助直线和圆来完成的几何作图”的书。但他最有名的著作乃是对综合几何原理的详尽说明,即 *Vorlesungen über synthetische Geometries* (《关于综合几何的讲演》)。该书出版于 1867 年。斯坦纳的许多证明曾得到意大利人鲁节·克雷蒙纳(1830~1903)的修正和改进。几何学中有些重要贡献也可以在朱勒斯·普吕克(1801~1868)的 *Neue Geometrie des Raumes* (《新空间几何》,1852)里看到。与此同时,狄德金(1831~1916)和康托尔(1845~1918)对分析学的基础作了有价值的工作,并特别研究了有理数和无理数。厄密(1822~1905)推广了超越数的研究,就是不满足有理整系数代数方程的那种数。他

① 见 *The Collected Papers of H. F. S. Smith*, 第一卷,38 页。

② *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* (《几何系统相依性的系统发展》)。

在 1813 年确定了 e 的超越性。刘维尔(1809 ~ 1892)和林德曼也研究过超越数, π 的超越性就是林德曼第一个证明的。凯利和西尔威斯特讨论过不变性;汉密尔顿发现了四元数的原理;数理逻辑这个数学中的全新部门是由乔治·布尔(1815 ~ 1864)开创起来的,他的《思维规律》这部论著给数学带来了新的转折。

20 世纪中叶数学已经发展成为一个巨大的结构,它的分支很快变得越来越多,其中每个都是需要专家来研究的一门科目,即使有第二个高斯出现,他能否涉猎极少几个分支而显得游刃有余,那都是值得怀疑的。企图涉猎整个领域的最后一人是亨利·庞加莱(1814 ~ 1912),在其研究领域中有分支已在前面提及,其他一些分支诸如汉密尔顿的四元数、伽罗瓦理论和代数形式等都是很重要的,对它们进行讨论已远远离开本书的范围。



附录一 书中所提人物的小传

阿贝尔,挪威数学家,他的夭折中断了他大有希望的一生。他出身低微,但还是进了克莱斯喜亚尼^①大学,很年轻的时候就在那儿表现出相当的数学才能。1824年他证明了不可能求得一般的五次方程的代数解(Mém. sur les Équations algébriques, où on démontre l'impossibilité de la Résolution de l'Équation Générale du Cinquième Degré)。阿贝尔的名字和椭圆函数也是分不开的,就这个题目他写过一些很有价值的论文。

巴思的阿台尔哈得,12世纪前半叶享有盛名的英国修道士。他游历颇广,访问过埃及和阿拉伯,最后到了西班牙。由于决心要掌握阿拉伯人从希腊人那儿继承来的学问,他在科尔多瓦听过演讲,曾得到欧几里得《几何原本》的一份抄本,并将其译成了拉丁文。直到16世纪可以利用希腊原文本之前,这个译本还未被废弃。此外,阿台尔哈得编写过几本数学、物理和医学方面的著作。

玛丽亚·盖塔娜·阿格乃西,很有才华的意大利数学家和语言学家。1750年她被任命为数学和自然哲学主讲,这个职位以前是由她的父亲Pietro di阿格乃西担任的。她的 *Instituzioni Analitiche* (《分析研究》)是一本极有价值的著作,广泛流传于英国和法国。她还给罗彼塔的 *Traité Analytique des Sections Coniques* (《圆锥曲线分析研究》)编过一本注释,但一直未出版。

^① Christiania,挪威首都旧名,现名奥斯陆。——译注

阿尔·伯坦尼(阿尔伯惕纽斯),叙利亚巴坦地区的一位阿拉伯王子,一生从事天文学研究,编过新的天文表以代替托勒密的天文表。他是一位耐心而精密的观测者,他对一年长短的估计与精确数值相差不到3分钟。在三角学研究方面他有重要进展,并且精通球面三角公式。

阿尔伯图斯,一位黑袍教僧侣,从1260到1262年是雷根斯堡地区的大主教。他曾在科隆和巴黎学习过,以后便隐退到修道院,埋头于研究神学和科学。他广泛的兴趣使他博得了“万能博士”的称号。他有一本文集(*Opera Omnia*,《全集》)在1651年出版于莱顿。

阿尔昆,数学家和天文学家,生于约克。781年从罗马归来后在帕尔马见到查理曼大帝,后者劝他参加了当时正在法兰克帝国开始的文艺复兴。796年他定居在土尔斯,被任命为该处的修道院长,并在那里去世。

阿普罗尼亚斯,公元前200年间享有盛名。他论圆锥曲线的论著最为有名。书中约有400条定理,这些定理虽然冗长而复杂,但多半是有独创性的(参看第二章)。“椭圆”和“双曲线”两个名词就是由他提出的(“抛物线”一词则是阿基米得提出的)。参看希思:《帕尔加的阿普罗尼亚斯》(1896)。

阿基米得,古代最伟大的数学家,生于叙拉古,在那里,他与尼洛王发生了联系。他在亚历山大城学习过,著作涉及的范围很广,在所有这些著作领域内都表现出他极深的造诣。他奠定了力学的基础,设计出一系列的力学器械,例如复滑轮和阿基米得螺旋。在纯数学方面,他预见到一些直至17世纪仍未流行起来的观念。有些作者认为他是微积分的真正发明人。也许确实可以说,古代没有一位数学家像他那样近地走到了微积分的边缘。最早的圆周与其直径之比的近似值应当说是由他提出的。

第二次 Punic 战争^①期间,阿基米得在马斯勒斯对叙拉古的劫掠

① 罗马和迦太基人之间的战争。——译注

中被一个罗马士兵杀死。

亚及他斯, 公元前 400 年间享有盛名。他是柏拉图的同时代人, 并且是柏拉图学派的杰出成员。他发展了比例理论, 借助两个比例中项以解决倍立方问题。他还研究过力学, 并且是首先把几何学应用于力学的人。滑轮也是由他发明的。

阿里斯塔克斯, 公元前 264 年生于萨摩斯岛。他是一位杰出的希腊哲学家。他的兴趣主要在天文学上, 认为天文学与其说是一门描述性的学问, 不如说是一门数学性质的学问。他主张太阳是固定不动的, 地球围绕着它描出一个圆, 然而他的这个理论没有找到几个信徒。他的杰出成就是一本其中估算过太阳和月亮到地球的距离的著作, 这本书曾由沃利斯译成英文 (*De Magnitudinibus et Distantiis Solis et Lunæ*, 《关于太阳和月亮的大小与距离》, 1668)。

罗吉尔·培根, 方济各会的修道士, 中世纪的“奇异博士”(Doctor Mirabilis)。他是当时最渊博的思想家之一。他在巴黎大学和牛津大学学习过。他高度评价了数学的重要性, 但是没有证据说明他对这门学科有过什么具体贡献。他的伟大著作 *Opus Majus* (《大著作》) 是应那时在位的教皇克雷芒四世的要求编成的, 其内容是对所有古代知识的概述。培根坚持科学应以实验为基础, 在上述论著中有一节 (*De Arte Experimentalis*, 《论实验艺术》) 是专论实验科学的。1271 年他写成 *Compendium Studii Philosophiae* (《哲学研究纲要》), 其中包含有对前人的激烈攻击, 把他们当中的许多人斥之为不学无术和无关紧要的人物。这本书和某些“可疑的新奇东西”一起使得他和方济各会发生了磨擦。他还写过 *Opus Minus* (《小著作》) 和 *Opus Tertium* (《第三著作》)。人们认为有许多发明是培根的功劳, 特别是望远镜, 但是难以找到有关的证据。

杰凡奈·拜惕司他·巴利诺, 一位对力学有些偏爱的业余数学家。他在 *De Motu Naturali Gravium, Fluidorum et Solidorum* (《关于重力、流体和固体的自然运动》, 1646) 的第二版中正确地说明了落体定律。

伊索克·巴罗, 英国杰出的数学家和神学家。曾就学于剑桥的三一学院, 后又游历欧洲。归来后(1660)被授圣职, 两年后被任为格雷欣几何教授, 不久又任第一任卢卡西安数学教授。1669年他把这个职位让给了牛顿。1672年成为三一学院的院长, 奠定了该院著名的图书馆的基础。三年后被任命为大学的副校长。他和沃利斯一样, 常被列为牛顿最伟大的先驱者之一。他的数学著作极多, 其中有 *Lectiones Opticæ* (《光学讲义》, 1669), *Lectiones Geometricæ* (《几何学讲义》, 1670), *Archimedis Opera*, *Apollonii Conicorum Libri iv* (《阿基米得全集, 阿普罗尼亚斯曲线》第四卷, 1675)。他是一位能言善辩、精力充沛的讲道者。他作为神学家的声誉是靠《论罗马教皇的主权》一书得来的, 该书在他去世三年以后出版。

比德, 当时最博学的人。他的知识确实渊博得很。其最伟大的著作是神学方面的 (*Historia Ecclesiastica Gentis Anglorum*, 《日耳曼人教会史》, 731), 但其作品涉及的主题极广, 他的影响鼓舞了黑暗时期的学术活动。

杰凡奈·拜惕司他·贝奈得梯, 伽利略的朋友。关于数学问题曾有所著述 *Diversarum Speculationum Mathematicarum et Physicarum* (《关于数学和物理的各种探究》, 1585)。

詹姆士·伯努利, 这个光荣家族中第一个在数学上成就卓著的人。他早年的兴趣是神学, 后来喜爱数学, 尤其喜爱当时新发明的微积分。1687年他在家乡成为数学教授。除了《猜测的艺术》这部主要著作以外, 他还写过大量论文, 它们涉及到各种各样的题目, 诸如级数、等周问题、微积分在力学和天文学问题上的应用以及高次平面曲线等。

约翰·伯努利, 起先研究医学, 1694年获得医学博士学位, 后来转而研究数学。他曾在格郎宁京擢升至数学教授。1705年其兄詹姆士·伯努利去世时, 即在巴塞尔当选为继任之教授。作为一位著作家, 他甚至比他的哥哥更加多产。他的大量论文涉及到曲线的求长、曲面的求积、等周问题和微分方程。指数运算就是由他发明的。

丹尼尔·伯努利, 约翰·伯努利之子。和他父亲一样, 他起先是研究医学, 但不久便转向数学。他在 1725 年成为圣彼得堡高等学校的数学教授。1733 年赴柏林, 起先当解剖学和植物学教授, 后来当物理学教授。他的主要著作《流体动力学》是研究气体力学和流体动力学的重要文献。他和他父亲一样也是一位多产作家。他和欧勒共同荣获法兰西学院一年一度颁发的奖金有 10 次之多。他在 1750 年当选为皇家学会会员。

尼古拉斯·伯努利, 詹姆士和约翰之侄。

波伊提乌, 罗马哲学家和数学家, 其著作构成了联系上古文化和中古文化的一座桥梁。他的希腊哲学知识曾引起东哥特国王狄奥多里克^①的注意, 因而被其任命为身边最有影响的大臣之一。然而, 后来他由于谋逆罪而被控下狱, 在狱中编成了伟大的著作《哲学的安慰》。他是一位多产作家, 和当时大多数学者一样, 他的兴趣主要是在神学方面, 但也编写过算术、几何、逻辑和音乐等方面的著作, 不过都没有表现出显著的独创性。他还把欧几里得、尼科马卡斯和托勒密的著作译成了拉丁文。他在 525 或 526 年被处以死刑。

詹诺士·鲍耶, 匈牙利数学家, 法卡斯·鲍耶之子, 非欧几何的奠基人之一, 关于双曲几何也有所论著 (*Appendix Scientiam Spatii Absolute veram exhibens*, 《绝对空间学附录》)。

拉斐罗·邦别利, 17 世纪意大利著名数学家。他在《代数学》(1572 和 1579) 一书中对符号有所改进, 对方程的研究也有贡献。在这本书里他证明了三次方程在所谓“不可约情形”下的实根性。

博斯考维奇, 杰出的意大利数学家和天文学家, 曾在罗马、巴维亚和巴黎相继担任教授。1740 年加入耶稣会 (Society of Jesus)^①。曾广泛游历过欧洲, 访问过英国, 1761 年在英国当选为皇家学会会员。1773 年耶稣会在意大利受禁后, 他便定居巴黎。他作过一些很有价值的

① 该会在 1533 年为西班牙人 Ignatius Loyola 所创办。——译注

天文观测,1769年他应皇家学会之请,到加利福尼亚作了一次远征,观察金星的一次凌日现象。除了极大量的论文之外,他还写过一本 *Elementa Universæ Matheseos* (《基本算术原理》,1754)。他在一篇论文 (*De Inequalitate Gravitatis in diversis terræ Locis*,《论地球上不同地点的重力不等性》)里接受了牛顿的万有引力理论,是欧洲大陆最早这样做的学者之一。

托马斯·卜拉都瓦丁,牛津的神学教授,后来成为坎特伯雷大主教。他是一位有才能的数学家,写过一本 *De Geometria Speculativa, De Quadratura Circuli* (《观察几何学,论圆的求积法》)。

亨利·布里格斯,杰出的英国数学家。他受教于剑桥的圣约翰学院,1598年担任第一任格雷欣几何教授。1619年继亨利·萨弗尔爵士之后任萨弗尔几何教授。他的名字和对数的发明是分不开的,他编算了第一张常用对数表(参看第九章)。他对天文学和航海术也有相当注意,他的《航海矫正用表》出版于1610年。

威廉·白隆葛,里昂城的子爵,皇家学会最初一批会员之一,并且是该会第一任会长,一直担任这个职位达15年之久。他还当过格雷欣学院的院长。他写过一些关于数学问题的论文,对连分数的研究有过贡献。他还给出了用于求等边双曲线面积的级数。

卡尔丹(哲罗姆·卡尔丹),当时一位最有天赋的人,在转而注意数学之前似乎已经涉猎过大多数的科学部门。他曾在米兰和巴维亚相继担任数学教授,在因为信奉异教或因负债,或者两个原因兼有而被投入监狱以前一直在执教。他的《大法》(1545)是最早一部专论代数的伟大拉丁文论著。在这部著作中他讨论了负数乃至虚数根,并用所谓卡尔丹法则解出了三次方程(参看第六章)。按照康托尔的意见,他还说明过一种符号规则的知识,据此可确定一个方程的正、负根的个数。他也写过力学方面的著作(*De Proportionibus Numerorum Motuum, Ponderum*,《论运动和重量的数字比例》,1545)。在这本书里提出,在斜面上支持一物体所需之力与斜面的倾度成正比。他的数学著作(*Opera Cardani*,《卡尔丹著作》)是在里昂出版的。

卡诺,杰出的法兰西军人,擅长于研究数学。他受教于 Mézières 的法兰西军事学校,在该校受蒙日的指导,并受其鼓励研究几何学。他是一位严厉而不妥协的共和党人,众议院议员,曾参与决议路易十四的死刑。他曾得到委任组织革命军队,他所显示的才能和热忱使他博得了“胜利组织者”的称号。后来他反对他的某些同事的过激手段,结果便以同情保王党之罪被判处流放。他逃亡到了德国,在德国写了一份有力的辩护书为自己的立场辩护,致使这些同事垮台。回到巴黎后他出任军政部长(1800)。他表现出自己是一位极有能力的部长,但由于拿破仑野心勃勃的计划阻碍,而脱离了政治。但是 1813 年法国的失败促使他重新供职,后被派往安特卫普要塞任司令官。他参加了拿破仑的“百日王朝”,以伯爵衔出任内政部长。

作为数学家,他的声望是靠他对几何学的贡献建立起来的,这些贡献已在第十四章提到。他的 *Œuvres Mathématiques* (《数学著作》)发表于 1797 年。

卡西奥多鲁斯,罗马政治家,有数学才能。他写过一些数学著作,设计了许多力学装置。他还写过音乐作品。

奥格斯丁·路易斯·柯西,杰出的法国数学家。他受教于工科大学,1816 年成为该校的力学教授。后又成为科学院院士,1832 年当选为皇家学会会员。

他曾随查理十世流亡到都灵,在那里也接受了教授的职位。1838 年回到巴黎后,被提名为法兰西高等学院(Collège de France)的天文教授,他接受了这个职位,但在 1852 年由于不愿进行忠于拿破仑三世的宣誓而辞职。

他的主要著作已在第十三章中列举到了。除此以外他还写过一些论文,它们涉及到的范围很广,最有价值的是研究函数论的一些论文,函数论这个数学分支实际上就是由他创立起来的。此外,他著作的范围还有定积分(1814)、微分方程(1823)和数学对物理问题的应用(1827)、曲线求长和曲面求积(1832)以及诸如行列式、概率和变分学等种种题目。他对光学也有重要的贡献(*Mém. sur la Théorie des Ondes*, 《关于波动理论的报告》,1815),有助于建立光的波动说。

他的全部著作都具有强调严密性的特点。

波纳凡妥拉·卡佛来利,意大利数学家,曾任博洛尼亚的数学教授(1629),对于17世纪初期数学发展所遵循的路线,他的影响可能比其他任何人都大。他在1629年左右发展起来的极微分割法,是在其 *Geometria Indivisibilibus* (《极微分割几何学》,1635)一书中发表的。这本书及其 *Exercitationes Geometricæ Sex* (《六个几何练习》,1647)一书,曾引起数学家对于导致微积分的那些方法的注意。他还写过一本论圆锥曲线的著作和一本关于平面三角形和球面三角的著作。他在他的同胞中曾做了许多普及使用对数的工作。

奥瑟尔·凯利,著名的英国数学家。在伦敦高等学院和剑桥三一学院有过一段光辉的经历,继此之后又取得律师资格(1849)。但他主要的兴趣是在数学方面,虽然他在继续其律师职务,但却写了一系列重要的数学论文,主要是投给他所助编的《数学季刊》杂志的。当剑桥设立 Sadlerian 数学教授职位时,凯利即当选担任此职务。除了作为他学院中的一员之外,他还享有牛津、都柏林和莱顿的名誉学位。他在1859年当选为皇家学会会员,1882年荣获 Copley 奖章。他的伟大著作《椭圆函数论》发表于1876年。这是关于椭圆函数的一部有价值的文献,对于这个问题,他总是表现出特殊的兴趣。他的大量论文涉及到广泛的题目,特别是不变量理论,这个题目曾得到他和西尔威斯特的有力推动。从1872年到1873年他是皇家天文学会的会长。

肖吉,编著过《数学科学中的三分法》(1484)一书,书中明显地预见到分数指数和负指数的应用。他的兴趣是在不定方程和数论方面,特别是关于完全数、亏数和过剩数的理论,并指出完全数或以6或以8为末位。

阿拉克西斯·克来劳,法国数学家。他是曾在巴黎讲授数学的琴·巴甫惕斯·克来劳的儿子。他继承了父亲的数学才能,很年轻的时候就在科学院宣读了一篇几何论文。18岁时他出版了 *Recherches sur les Courbes à Double Courbure* (《关于双曲率的各种曲线研究》)一书,同年取得科学院院士资格。1736年曾作为委员会委员和莫培督一同前往拉普兰,任务是测量地球表面一度的长度,归来后写成 *Théorie de*

la Figure de la Terre (《地球图形理论》, 1743) 一书。不久以后被选为皇家学会会员。

后来他把大部分注意力集中于天体力学。他算出了哈雷彗星归返原地所需的时间, 编成了 *Théorie de la Lune* (《月球理论》) 一书, 并为此获得圣彼得堡学院所授予的奖金。他在纯数学方面的研究涉及到的范围很广。他钻研过三体问题, 写过许多关于微积分的重要论文。其中主要的是: *Sur Quelques Questions de Maximis et Minimis* (《关于极大和极小的一些问题》, 1733) 和 *Recherches générales sur le Calcul Intégral* (《积分学一般研究》, 1739)。他还编过一本代数著作 (*Elémens d'Algèbre*, 《代数学原理》, 1749) 和一本几何著作 (*Elémens de Géométrie*, 《几何学原理》, 1765)。这两本书都被译成了英文。

克里斯多夫·克雷弗斯, 德国的一位耶稣会会员。他的大半生是在罗马度过的, 他研究数学的才能在罗马得到了发挥, 后来成为数学教授。他在 1608 年编成了一本代数书, 书中把德国的一套代数符号介绍到了意大利。他之所以值得我们纪念, 是因为他改进历法的工作, 这项工作是应罗马教皇格列高里十三世之邀而承担下来的。

约翰·考灵斯, 当时许多最杰出的科学界人士的朋友和顾问。他和国内外的许多饱学之士都保持有积极的通信联系, 其中有布里格斯、乌特勒、牛顿、巴罗和莱布尼兹。他还负责出版了许多有价值的著作, 若是没有他, 这些著作就可能失传。

1712 年, 他出版了著名的 *Commercium Epistolicum D. Johannis Collins* (《考灵斯书信集》, 耶稣会光明出版社), 其中重印了有关微积分发现及其所引起之争论的全部通信。该书认为微积分的发明权属于牛顿。

罗吉·库兹, 英国数学家, 他的夭折可能夺去了他成为牛顿时代一位最有才华的人的荣誉。他受教于伦敦圣保罗学校和剑桥的三一学院, 1705 年在三一学院被定为评议员, 在 24 岁这样小的年纪就被任命为新设立的 Plumian 天文教授。他在 1711 年当选为皇家学会会员, 两年后取得圣职, 同年他出版了牛顿《原理》的第二版。除了第十二章中所提到的几本著作外, 库兹还著有 *Opera Miscellanea* (《杂录》,

1722)和《流体静力学和气体力学讲义》(1738)。他的著作是由他的继承人罗伯特·史密斯博士收集出版的,其书信集由爱尔斯顿在1850年出版。

久萨纳斯·尼可拉斯,布里克森的主教,罗马的红衣主教,著有 *De Staticis Experimentis Dialogus, Reparatio Calendarii et Correctii, Tabularum Alphonsi, De Quadratura Circuli* (《实验静力学问答,阿尔芳斯图表,关于圆的求积》)。他的著作是1514年在巴黎被收集出版的。

达兰贝尔,希凡利·得斯陶切斯的私生子。他起先研究医学和法律,后来转至数学。他在数学上的研究不久就引起注意,1740年被接受为法兰西学院院士。腓特烈二世曾邀请他到普鲁士担任柏林学院院长,但他谢绝了,他还谢绝了到俄国担任凯瑟琳二世之子的家庭教师的邀请。

Traité de Dynamique (《动力学论》)是他的一部杰出著作,书中发表了以他的名字命名的原理,从而有力地促进了人们对力学的兴趣。达兰贝尔还把他的一些原理应用于流体运动。他在 *Traité de l'Équilibre et du Mouvement des Fluides* (《论流体的静止和运动》)和 *Essai d'une Nouvelle Théorie sur la Résistance des Fluides* (《试论流体阻力的新理论》)中就有一些新的独创性见解。他还写过微积分的著作 (*Mémoire sur le Calcul Intégral*, 《积分学报告》,1739)。

达兰贝尔是伏尔泰的朋友,并且是18世纪法国百科全书的编纂人。

阿伯拉罕·棣莫弗,生于香巴尼的维特里地区,但其一生大多是在英国度过的。在废除《兰茨法》和驱逐胡格诺^①(1685)以后,他就来到英国,在英国以家庭教师为职业,生活不太安定。他曾获得一部牛顿的《原理》,从此便对数学发生兴趣。由于勤奋的学习,他很快就成为英国第一流的数学家之一。1697年他当选为皇家学会会员,同时又是巴黎科学院和柏林科学院的院士。他曾被派为解决牛顿和莱布尼兹之间关于微积分发明权问题的委员会委员。如我们所指出

① 16至17世纪法国加尔文派教徒的称呼。——译注

的,他的主要兴趣是建立概率论,但他给《皇家学会会报》也写过一些论文,这些论文所讨论的是微积分和解方程。他对三角学的贡献载于他的 *Miscel lanea Analytica de Seriebus et Quadraturis* (《关于级数和求积的综合分析》,1730)一书中,书中包含有以他的名字命名的定理。

盖拉德·德扎尔格,法国数学家和工程师,笛卡儿的朋友和通信者。他用射影方法处理了圆锥曲线,这对纯粹几何的研究是一个独特性贡献。

笛卡儿,法国哲学家和数学家。他生于都兰的拉哈叶,曾应征入伍,因此而遍历欧洲,最后定居荷兰(1628)。他在荷兰期间,几乎对所有的人类知识部门都作出了贡献。他最早出版的一部著作是 *Discours de la Méthode* (《论方法》,1637),附有三篇短论 *La Dioptrique* (《屈光学》), *Les Météores* (《流星》)和 *La Géométrie* (《几何学》),其中最后一篇短论解释了坐标几何的原理。在稍后一部著作 *Principia Philosophiæ* (《哲学原理》,1644)中,他曾试图借助其著名的原子涡动说对太阳系作纯粹的力学解释。他还写过许多曾得到广泛流行的哲学著作。

狄奥芬塔斯,后期亚历山大学派最出色的数学家之一。通常认为他的 *Arithmetica* (《算术》)一书是关于代数的一部最早的论著,书中可以看到有一种近于代数符号的写法(参看第四章)。他也写过一本论多边形数的著作(参看希思:《狄奥芬塔斯》,1885)。

狄里赫利,起先在科隆学习,后来在哥廷根受业于高斯门下,在那里接替高斯任数学教授。他一生主要是研究数论 (*Vorlesungen über Zahlentheorie*,《关于数论的讲演》,1839)。他在 $n = 5$ 的情形下证明了费尔马的著名定理。他还给克列勒的《杂志》写过一些研究级数和流体动力学的论文。

爱森斯坦,曾在柏林大学讲授数学。他最初是因为给克列勒的《杂志》写了一篇论文 *Théorèmes sur les Formes cubiques et solution d'une Équation du 4^{me} Degré à Quatre indéterminées* (《关于立方形式定理和

四次方程到四位不定数的解》)而引起人们注意的。他在 *Neue Theoreme der Höheren Arithmetik* (《高等算术新定理》) 一书中发展了复数理论。他还写过关于椭圆函数和数论方面的论文。高斯对他极为尊重, 认为过去只有三位伟大的数学家, 即阿基米得、牛顿和爱森斯坦。

爱妥斯泰尼斯, 阿基米得的一位比较年轻的同时代人。他在许多知识部门里都是有名的, 并且是著名的亚历山大图书馆的负责人。他的突出成就是对地球的度量, 按照希思的说法^①, 他曾求得地球的周长为 24 662 英里 (252 000 斯塔地亚^②)。他还发明过一种“筛”, 用来辨别所有的素数。在几何方面, 他研究过求任意两条给定直线之间的比例中项的方法。

欧几里得, 有关他生平的资料不多。他生于公元前 4 世纪, 《几何原本》一书大概写成于公元前 330 ~ 320 年间。这本书支配几何教育达 2 000 年之久。书中多数材料都有其更早的来源, 欧几里得本人提出的命题较少。

欧铎克色斯, 最有名的希腊数学家之一。欧几里得《几何原本》中的许多命题都是他提出的, 特别是与比和比例有关的命题。他发展了比例理论, 专门研究过黄金分割, 即将一直线分成中末比的分割。他对立体几何也作过有价值的贡献, 曾证明棱锥和圆锥的体积分别是同高同底的棱柱和圆柱体积的三分之一。在这些证明中, 他巧妙地运用了穷竭法。

李昂纳德·欧勒, 第十三章中已经谈到这位伟大的瑞士数学家的贡献。这里再补充一些传记性的细节。他是一位同样爱好研究数学的路德教的牧师之子。16 岁时, 欧勒被送往巴塞尔大学学习神学、医学和东方语言学。在那里他接触到了约翰·伯努利和这个著名家族中的其他成员, 这引起了他对数学的兴趣。1727 年他应凯瑟琳一世之

① 见 *Greek Mathematics*, 第二卷, 107 页。

② Stadia, 希腊尺度名, 相当于 606.75 英尺。——译注

命前往圣彼得堡,在那里当物理学教授。三年后继丹尼尔·伯努利任数学教授。然而严酷的气候使他受不了,再加上长期紧张的研究工作,致使他一只眼睛失明。1741年他到了柏林,这次是应腓特烈大帝之请,在四分之一个世纪里,他给柏林学院和圣彼得堡学院提交了一篇又一篇的论文。1766年他回到俄国,不久后另一只眼睛失明。即使如此,他的作品数量也未有所减少。

他在数学史上的地位很重要。他的一些最不朽的论著已在第十三章中述及,但是他对其他科学部门也有强烈兴趣,特别是对光学和天文学。他的《月球运动理论》(1772)是在惊人的困难条件下完成的,他对光学研究的结果收集在其《屈光学》(1771)中。

佩亚尔·费尔马,异常有天才的法国数学家。曾被指定学习法律,但他用余暇致力于数学研究,作出了有价值的贡献。他在研究几何的过程中发现了坐标几何的原理,并且在某种程度上预见到微积分的方法。他振兴了数论的研究,并和帕斯卡一起奠定了概率的数学理论的基础(参看第七章)。

傅里叶,法国有名的数学家和物理学家。1798年曾随拿破仑远征埃及,作过南埃及的总督。他在埃及的期间写了一些科学论文。1801年返回法国,1808年被封为男爵。在这期间他继续从事科学研究,并于1816年成为法兰西学院院士,1823年成为皇家学会会员。他的巨著 *Théorie Analytique de la Chaleur* (《热的分析理论》) 发表于1822年。他是在研究热流问题时引出以他的名字命名的级数的。

伽利略,这位著名的意大利科学家对许多科学部门都作过显著贡献,但其中最有价值的,乃是他动力学方面的工作。他在 *Discorsi* (《数学论文集》) 中为动力学奠定了牢固的基础。他对落体运动所持有的见解是正确的,而且似乎已经熟悉后来牛顿所发表的运动定律,但他始终没有说清楚这些定律(参看第八章)。他研究过抛射体运动,证明了抛射体的径迹是抛物线。1582年在比萨任数学教授时,作过一些重要的单摆实验。他在17世纪初用新发明的望远镜进行的一些观测,对于证实哥白尼的假说贡献很大。

卡尔·弗里得利希·高斯,出身于德国不伦瑞克的一个非常微贱的家庭。他童年时就表现出极惊人的早熟,起先曾被送到卡鲁林学院学习,后来送到哥廷根大学受业于喀斯纳。如我们已经指出的,他的数学兴趣主要是在数论方面。他对复数也作过专门研究,对天文学作了重要的贡献。他曾发现一种计算行星轨道的新方法,因此在圣彼得堡被提名为教授,但被他谢绝了。1833年开始研究地磁学。他在这个领域里的劳动成果编成 *Intensitas Vis Magneticæ Terrestris ad Mensuram. Absolutam Revocata* (《测量地球的磁吸力》)一书。他和韦伯一起发明了磁偏角罗盘针(declination needle)和双叉磁强计(bifilar magnetometer)。他在 *Dioptrische Untersuchungen* (《屈光学研究》,1840)中曾把数学应用到光学上。

杰勒德,令人难忘的是他作为一位翻译家的工作。他从阿拉伯文翻译了近100种著作,其中包括托勒密的《天文集》、欧几里得的《几何原本》、狄奥多西的《球面几何学》和梅内莱厄斯的一本著作。他在上述第一本书的译文里最早使用了“sinus”这个字来表示托勒密的半弦。

亚尔伯·吉拉德,尼德兰最著名的数学家之一。他对方程的论述胜过韦达,他讨论了虚根,指出 n 次方程有 n 个根。他的主要著作是 *Invention Nouvelle en l'Algebre* (《代数中的新发现》)。他还出版了一版斯特文的《算术》,增添了许多材料;又出版了一本三角学,其中第一次出现了表示三角函数的缩写符号 \sin , \cos , \tan (参看第六章)。

詹姆士·格雷果里,著名的苏格兰数学派系之首。他是圣安德鲁的数学教授(1668)和爱丁堡的首席数学教授(1675)。1668年他出版了 *Vera Circuli. et Hyperbolæ Quadratura* (《圆和双曲线的正确求积法》),其中包含有所发现的用来表示圆和双曲线面积的无穷收敛级数。这本著作中包括某些三角函数的级数展开式,直接展开和反函数展开都有。级数 $\theta = \tan\theta - \frac{1}{3}\tan^3\theta + \frac{1}{5}\tan^5\theta - \cdots$ (θ 在 $-\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{\pi}{4}$ 之间取值),就是以他的名字命名的。他还发明了一个用来计算对数的非常简单的收敛级数。他在 *Optica Promota* (《发展中的光学》,1663)一书中描述了自己发明的格雷果里望远镜。他还著有《称量空虚的伟

大的新艺术》(1672),这本书是对格拉斯哥神学教授辛克莱的抨击。他在爱丁堡的数学教授职位是由其侄大卫继任的。

哈雷,著名的英国天文数学家。他在希腊几何这个被人忽视的领域中做了重要的工作,出版了阿普罗尼亚斯论圆锥曲线的著作。从1677到1678年他在圣赫勒拿岛进行天体观察,曾出版南方星球一览表(*Catalogus Stellarum Australium*,《澳洲星球一览表》,1679)。从1699年到1702年踏勘了南大西洋,制成了罗盘变差略图。他还专门研究过彗星,证明了它们是太阳系的成员,围绕太阳描出偏心率极大的轨道。他曾发现1681年的彗星,并预言它于1759年返回。1678年成为皇家学会会员,作为该会书记,他编纂了该会从1685年到1693年的《皇家学会会报》。他曾负有监督牛顿的《原理》付印之责(参看第十一章)。沃利斯去世后(1703),由他担任萨弗尔几何教授,10年后被任为皇家学会秘书,福莱姆斯代去世后(1719)他又担任皇家天文学家。

威廉·罗万·汉密尔顿爵士,爱尔兰数学家,生于都柏林。童年时就表现出极惊人的早熟,特别是在数学和语言学方面。他在1824年进入都柏林的三一学院,当他还是一个大学肄业生时,就被任命为天文学教授。他的研究光学的论文《光线系统的理论》发表于1826年。1843年完成了四元数的伟大发现,并认为这个问题对数学家来说,其用处一定不亚于微积分。他的《四元数讲义》发表于1853年,其《四元数原理》一书直到他去世那一年才发表,大家都公认这是他的杰作。1835年获得爵士勋位。

托马斯·哈里欧,杰出的英国代数学家,也可能是一位有名的天文学家。他曾随同华尔脱·拉里爵士远征弗吉尼亚,归来后一心研究代数。他的 *Artis Analyticæ Praxis* (《实用分析艺术》) 出版于1631年(那时他已去世),书中详尽地说明了方程的性质和构造,并对符号作了某些重要的改进(参看第六章)。

约可伯·赫尔曼,约翰·伯努利的学生。曾相继在帕多瓦、法兰克福和圣彼得堡担任数学教授,在巴塞尔担任过伦理学教授。他写有一系

列研究微积分及其对几何学之应用的重要论文。

希罗,写有几何和力学方面的著作,保存下来的主要著作是他的 *Metrica* (《诗句学》,三卷本)。这部著作讨论的是二次方程的数值解法以及平面和立体图形的求积法,书中包含有三角形面积用其三边来表示的著名公式。在力学方面,他讨论了重心和简单的机械动力问题。在一本研究气体力学的著作中,他考察了蒸汽的性质。书中还描述了一种简单形式的蒸汽机和一种借助压缩空气维持喷水动作的装置(Hero's Fountain,希罗喷泉)。他的生卒年代仍然无从查考,按照希思的意见,他是托勒密晚年的同时代人(公元2世纪)。

喜帕恰斯,生在巴艾图尼亚的尼西亚人,也许是古代最伟大的一位天文学家。他是一个耐心而熟练的观察者,编有1080年恒星的星球表,准确地确定了一年的时间长度。他解释了岁差现象。他曾编成一张供天文学用的弦数表,相当于我们今天的正弦表(参看第三章),因而奠定了三角学的基础。一般认为托勒密的《天文集》主要是靠喜帕恰斯的著作写成的。

希波克拉底,公元前5世纪后半叶住在雅典。他钻研过倍立方问题,曾证明它可化为求两直线(其中一条是另一条的两倍长)之间的两个比例中项的问题。他最出色的工作就是把月牙形面积化成了直线形的面积。

胡克,皇家学会最早一批会员之一。他非常多才多艺,极有发明天才,许多重要发明都是他的功劳,其中包括旋转式晴雨计(wheel barometer)。他在1664年担任皇家学会的实验评议员,翌年任格雷欣几何教授。他详细解说了正确的弹性理论,发现了以他的名字命名的定律。他已经多少预见到反平方定律。他进行过一些重要的天文观察,制造了第一架格雷果里望远镜。他还设计过伦敦许多有名的建筑物,其中有Bethlehem公立学校和Montague大厦。他在1674年编过*Cutlerian Lectures*(《克特莱讲义》),但他最有名的著作是*Micrographia*(《显微镜学》,1685)。

胡克是一位熟练的实验家,一度帮助过波埃耳。他一生都陷于

频繁的争吵。1671年他攻击过牛顿的色素理论,后又宣称他曾预见
到牛顿的引力理论。他和奥尔登堡及赫维留也争吵过。

罗彼塔,约翰·伯努利的学生,在不同的数学分支里都有著作,但最令
人难忘的是他把新的分析方法介绍到法国来(*Analyse des Infiniment
Petits*,《无穷小分析》,1696)。

约翰·赫得(赫得纽斯),阿姆斯特丹市市长,一位有才能的数学家,对
方程的研究有过贡献。在一封曾载入舒腾所著的《论笛卡儿》内的
一封信里,可以发现他有一种确定方程等根的方法。

惠更斯,杰出的数学家、天文学家。曾著有 *Theoremata de Quadratura
Hyperbolæ, Ellipsis et Circuli*(《双曲线、椭圆和圆的求积定理》,1651)。
此后又写有一些关于圆锥曲线求积和圆周近似求长(*De Circuli
Magnitudine Inventa*,《论圆周大小的求证》,1654)的短论。他对于发
明测量时间的准确方法,曾给予相当大的注意,他在这方面的研究
结果是发明了摆钟,在其 *Horologium Oscillatorium sive de Motu Pendu-
lorum*(《摆动的时钟或重量运动》,巴黎,1673)中对此有所描述。该
书详尽地说明了重物垂直下降或沿光滑曲线下降的情况。关于渐
屈线的理论是他发展起来的,他在讨论摆线时证明了摆线的等时
性。他还研究过由物体碰撞引起的一些问题,得到一定成功。

除了数学方面的著作外,他的突出成就还有对光的波动说的解
释(1678)。他曾改进望远镜,设计出一种以他的名字命名的目镜。
在其 *Systema Saturnium*(《土星系》,1659)中讨论了一些天文问题,包
括土星环的特征问题。

希帕蒂亚,亚历山大城的地昂之女,她是一位极有天赋的妇女,曾在亚
历山大城讲授数学,关于阿普罗尼亚斯锥线和狄奥芬塔斯的算术出
版过一些注释。公元415年,她在亚历山大城的街道上被暴徒杀
害。

雅可比,一位非常著名的德国数学家。曾在哥尼斯堡任数学教授。他
研究过各种各样的问题,但主要兴趣是椭圆函数(*Fundamenta Nova*

Theoria Functionum Ellipticarum,《椭圆函数新基本理论》,1829)。他对微分方程、数论和动力学的研究也有重要贡献。

开普勒,有名的德国天文学家、数学家。曾在格拉茨任数学教授,台科·布拉赫去世后便成为鲁道夫二世的宫廷数学家。他曾想出一些确定曲线所围面积和体积的方法(参看第七章)。著有 *Astronomiæ Pars Optica*(《天文学中的光学》,1604), *Astronomia Nova*(《新天文学》,1609), *De Harmonica Mundi*(《论和谐的宇宙》,1619),在这些著作中发表了以他的名字命名的行星定律。在 *Nova Stereometria Doliorum*(《新测定酒桶体积法》,1615)中,他发展了确定曲线所围面积和体积的规则。这本书对卡佛来利和沃利斯有过深刻影响。

菲力克斯·克莱因,知名的德国数学家,曾在哥廷根担任数学教授。他对椭圆函数论、微分方程和非欧几何都有重要贡献。1885年当选为皇家学会会员,1912年获得该会的 Copley 奖章。

萨伐斯特·法兰索斯·拉克罗克斯,杰出的法国数学家。他在各个数学部门中都有大量著作,但本人没有什么独创性贡献。他的 *Traité du Calcul Différential et Intégral*(《微分和积分论》)及其续篇 *Traité des différences et des séries*(《微分和级数论》,1800)在1816年曾被皮科克、巴拜奇和赫歇尔三位英国数学家译成英文。这个译本对于把欧洲大陆上的方法和记法介绍到英国来贡献很大。

拉格朗日,这位著名的数学家生于都灵。他对数学的兴趣是他在无意中发现哈雷的一篇论文时产生的,这篇论文的题目是《在解决求光学玻璃镜的焦点问题时,近世代数优越性的一个实例》(《皇家学会会报》XVII,1693,960页)。此后他便献身于数学研究,而且很热心,以至在18岁时就被任命为炮兵学校的几何教授。在都灵期间曾创立都灵科学院,给其期刊《都灵杂录》写过几篇论文,其中有一些包含了他在变分学方面的研究结果,可以认为他就是这个数学分支的创始人。

他在25岁时就被公认为欧洲最伟大的数学家了。但是,不断的研究工作开始严重地损害着他的健康。1764年,由于写了一篇关

于月球天平动的短论而获得巴黎科学院的奖金,这只是他从该院获得的多次奖金中的第一次而已。1776 年应腓特烈大帝之邀他由欧勒推荐前往柏林。他在柏林居住了 20 年,在这期间送交给柏林学院大量的论文,讨论到数学的各个分支。他在柏林期间还编过一本杰作,名为 *Mécanique Analytique* (《分析力学》),该书乃是说明分析方法威力的一个突出范例。

腓特烈大帝死后,拉格朗日便应路易十六之邀来到巴黎,被派往一个为了改革度量衡而设立的委员会里去,两年后任高等师范学校的数学教授。该校维持了几个月的时间即行结束,他又到工科大学,仍任数学教授。1797 年其 *Théorie des Fonctions Analytiques* (《解析函数论》)一书出版。拿破仑曾颁给他许多勋章。他曾任元老院议员并被封为伯爵。

菲利浦·狄·拉·希尔(拉希尔),法兰西高等学院(巴黎)的数学教授。

写过圆锥曲线方面的著作 *Sectiones Conicæ* (《圆锥曲线》,1685),其中用射影方法研究了圆锥曲线的性质。

拉鲁埃尔(拉鲁比尔),出版过一本关于圆和双曲线求积问题的著作(1651),还有一本论摆线(*Geomeiria Veterum Promota de Cycloide*,《关于摆线的旧移动几何学》,1660)的书。

琼·亨利奇·兰伯特,其著述范围包括各种各样的数学部门和非数学部门。流传至今的仅有著作是三角学方面的,他在这些著作中引入了椭圆函数。

兰登,英国数学家。初次受人注意是在 1744 年,因为他在这年给《妇女日记》写了一系列短文。1766 年被选为皇家学会会员,给《皇家学会会报》写过许多重要论文,这些论文所研究的是面积的确定、级数,等等。其《数学论文集》(1775)中有一个以他的名字命名的定理,是借两条椭圆弧求双曲线弧长的。他还写过一篇关于椭圆函数的短论,这篇短论后来对于他在欧洲大陆上的某些继承者成了一种激励力量。然而,他最出名的乃是他剩余分析方面的工作(参看第十二章)。

帕爱莱·西蒙·拉普拉斯,著名的法国数学家和天文学家。他在故乡(博蒙特-恩-奥齐)的军事学校学成后便在那里任教。18岁时,他带着写给达兰贝尔的介绍信来到巴黎,当时达兰贝尔正享有盛名。通过后者的影响,拉普拉斯被任为巴黎军事学校的数学教授。

1773年,拉普拉斯在法兰西学院当众宣读了一篇论文,第一次显示了他的数学才能,他在论文中论证了太阳系的稳定性。他编写过许多研究报告,研究的主要是天文学问题,同时,他在着手写他的巨著 *Mécanique Céleste*(《天体力学》五卷本,1799~1825)。他在这部著作中声称要对太阳系作一完整的说明,这也是他写 *Exposition du Système du Monde*(《宇宙体系解释》,1796)一书的目的。

他在《论球体的吸引及行星图》(1782)一书中,完满地解决了一个球体对一外部质点的吸引力这个一般问题。其《概率的分析理论》(1812)一书对概率论有显著的贡献。

拉普拉斯曾获得许多荣誉,它们几乎来自所有的欧洲学术团体。

阿得润·马利亚·勒让德,法国知名的数学家。受教于巴黎的 Mazarin 学院,23岁时就担任巴黎军事学校的数学教授,不久后又任高等师范学校的教学教授。1782年由于一篇弹道学短论(*Recherches sur la Trajectoire des Projectiles dans les Milieux Résistants*,《关于在阻尼介质中的弹道的研究》)获得法兰西学院所授予的奖金。他的论文 *Recherches sur la Figure des Planètes*(《行星图研究》)也有巨大价值。

他曾在一个为了利用三角测量格林尼治和巴黎之间距离而设立的委员会中担任委员之职。然而,他用大多数时间专门研究椭圆积分。他在这方面的研究成果于1832年首次发表在他的 *Traité des Fonctions Elliptiques*(《椭圆函数论》)中。他还写过数论方面的东西(*Essai sur la Théorie des Nombres*,《数论随笔》,1798和1808)。他写过一本关于椭球之间引力的著作(*Recherches sur l'Attraction des Sphéroïdes homogènes*《同类球体吸引力研究》,1785),并因此而被选入法兰西学院。在其 *Nouvelles Méthodes pour la Détermination des Orbites des Comètes*(《关于确定彗星轨道的新方法》)中,可以看出有最小二乘法的萌芽。

勒让德还写过几何著作(*Éléments de Géométrie*,《几何原理》),其

中证明了 π 的无理性。

葛特福莱·莱布尼兹, 牛顿伟大的同时代人, 生于莱比锡。他是 17 世纪生于德国的仅有的一流的数学家。他本来打算做律师, 但几乎对每个知识部门都热心尽力。他是由于惠更斯的鼓励才研究数学的。20 岁时他就发表了一篇短论 *De Arte Combinatoria* (《论组合的艺术》), 企图把理论的全部真理性归诸一种计算结果。莱布尼兹还发明过一种计算器, 远比帕斯卡的计算器优越。他的晚年大多是为卜根代公爵服务, 但还是挤出了时间担任柏林科学院的第一任院长, 该院的创建便是由于他的尽力和热心。他对发明微积分的功绩已在第十章中述及。

利奥纳多, 即斐波纳奇(彭那邱之子), 比萨的一位商人。他游历很广, 访问过埃及、希腊、叙利亚和意大利。他是一位特别有能力的人, 而且有研究数学的特殊才能。其《算盘书》(第二版, 1228) 出版于 1202 年。这是一本算术和代数论著, 其中有许多独到之处, 把印度、阿拉伯数字介绍到欧洲来的, 就是这本书。他的著作还有 *Liber Quadratorum*, *Flos* (《求积法, 精华》) 和《实用几何学》, 它们都对中世纪的数学发展起了深远的影响。

马利斯·索菲斯·李, 挪威知名的数学家, 1872 年曾在克里斯丁亚那任数学教授, 对群论和微分几何有重要贡献。

罗巴切夫斯基, 俄国数学家。出身虽然微贱, 但后来在喀山还是擢升为数学教授。他的非欧几何著作《平行线理论的研究》(1891) 曾被译成英文。

柯林·马克劳林, 从 1717 年到 1725 年在阿伯丁的马里斯怡学院担任数学教授。1719 年当选为皇家学会会员, 1724 年由于写了一篇关于物体碰撞的短论而获得科学院所授予的奖金。16 年后由于他的一篇论潮汐的短论而和欧勒及丹·伯努利共同获得科学院的奖金。由于牛顿的推荐, 他曾在爱丁堡担任数学教授, 以补因詹姆士·格雷果里逝世而出缺的职位。

他最早的一部重要著作是 *Geometrica Organica, sive Descriptio Linearum Curvarum Universalis* (《组织几何学, 或关于一般曲线的说明》, 1720)。他在《流数论》(1742) 一书中曾企图为流数法提供一个几何框架, 以摆脱人们针对它的批评。其《代数论》一书是他死后 (1748) 出版的, 《关于艾萨克·牛顿爵士的发现的说明》则未能完成。他给《皇家学会会报》写过一些论文, 其中有一篇是论曲线的构造和度量的, 还有一篇是关于有奇异根 (impossible roots) 的方程的。马克劳林在 1745 年叛乱期间积极参与了保卫爱丁堡的活动, 该城陷落后便逃往约克, 并在那里去世。

莫培督, 法国知名的学者。曾在军队服役, 后转而研究数学, 是欧洲大陆上提倡牛顿方法的少数几个人之一。1728 年当选为皇家学会会员, 且为法兰西学院院士。1736 年在一个前往拉普兰测量经度每度长度的委员会中出任委员之职, 归来后写成 *De la Figure de la Terre* (《地球图理论》) 一书。他曾应腓特烈二世之邀前往柏林, 后随普鲁士军队参战, 于 1741 年被俘。

他还写过天文学和微积分 (极大和极小) 方面的著作。他在 1751 年的 *Essai de Cosmologie* (《宇宙论》) 中概述了“最小作用量原理”。

孟尼区玛斯, 欧铎克色斯的门生, 似乎是最早研究圆锥曲线的人, 曾证明倍立方问题等价于一个求抛物线和双曲线的交点或求两条抛物线交点的问题。

墨卡托 (考夫曼), 霍斯坦人。其一生大都是在英国度过的, 后为皇家学会最早一批会员之一, 有数学才能。1668 年出版 *Logarithmotechnia* (《对数技术》) 一书, 书中载有他的著名级数

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$$

他是把双曲线方程写成

$$y = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

的形式, 再利用沃利斯的求积法推得上一级数的。他还写有天文学方面的著作。

梅尔生,方济各会的修道士,笛卡儿的朋友。他很快就在科学界获得了领导地位,和许多学者保持着密切的通讯联系。作为数学家,他对数论有过贡献,但他最出色的著作是物理方面的,有 *Cogitata Physico Mathematica* (《物理—数学探索》,1644), *L' Harmonie Universelle* (《普遍的和諧》,1636)。

加斯帕·蒙日,法国知名的数学家。出身虽然微贱,但还是进了 Mézières 的炮兵学校,并在 1768 年升为该校的数学教授。他对数学的贡献引起了注意,于 1780 年被接受为科学院院士,不久后又出任巴黎公立中学的流体动力学教授之职。1794 年担任工科大学的教学教授。

在大革命期间他是海军部长,主管军备生产。他曾随拿破仑远征埃及,在新成立的埃及大学任数学教授。和拿破仑一同回到法国后,又重新担任工科大学的原职。1799 年被任命为元老院议员,拿破仑曾赐给他“贝鲁斯伯爵”的称号。君主政体恢复后,其全部荣誉即为路易十八所剥夺。

第十四章已经叙述了他在数学上的主要贡献。此外他还写有大量论文,其中很多都被收录在他的 *Application de l' Analyse à la Géométrie des Surfaces du 1^{er} et 2^{me} Degré* (《应用于一次和二次曲面上的几何学的分析》,第 4 版,1819)一书中。

孟特摩,其著述主要是关于概率论的,因此与棣莫弗有交往。他还写过一篇关于无穷级数的论文 (*De Seriebus Infinitis Tractatus*,《论无穷级数》,《皇家学会会报》,1717)。

约翰·纳波尔,曼彻斯特的一位贵族,苏格兰知名的数学家。除了关于对数的论著以外,他还写过 *Rabdologix, seu Numerationis per Virgulas Libri duo* (《小数算法,或两本通俗的计算书》,1617),描述了用“尺”或“牙杖”进行计算的种种巧妙方法。纳波尔对三角学也有重要贡献,至今仍有某些公式以他的名字命名,如纳波尔类比 (Napier's Analogies)。

作为一位严格的长老会教友,他曾编成一部《约翰启示录大全的一般发现》,这是猛烈攻击罗马教会的一部书。

约敦纳斯·尼摩拉略斯(约敦纳斯·撒克叟), 约生于 12 世纪末, 有关他的生平介绍很少。他是一位黑袍教僧侣, 1222 年曾任教团团长。他编写过一本代数和几何论著, 使用了字母来表示数量, 从而向代数符号系统的现代化迈出了重要一步。他还写过静力学方面的著作。

艾萨克·牛顿, 他对数学的贡献已在前面几章涉及, 下面再补充一些简单的传记性细节。他在 1642 年圣诞节生于葛兰萨姆附近的伍斯特荷。1661 年作为一位减费生进入剑桥的三一学院, 三年后便成为学者。1665 年由于瘟疫流行而回到故乡, 大概就是在这时候, 他开始了数学研究和光学研究。1667 年回到剑桥, 不久后, 他即被选为三一学院的评议员。1669 年他继巴罗之后担任剑桥的路卡西数学教授之职, 同年代表剑桥被选入议会。1671 ~ 1672 年间, 《皇家学会会报》发表了他的光学理论, 不久后即被选为皇家学会会员。1684 年哈雷访问了他, 敦促其出版有关引力的发现。1687 年发表《原理》一书。1696 年出任造币局监督, 三年后任该局局长。1703 年成为皇家学会会长, 出任这个职位直到去世。两年后获得爵士头衔。晚年困于病弱, 于 1727 年逝世。

奥尔登堡, 生于不来梅并在那里受教育。他曾作为本国的领事前往英国, 在牛津结识了玻意耳和其他后来组成了皇家学会的一批人。1663 年担任学会的联络秘书(和威尔金斯主教一起), 第二年就开始出版《皇家学会会报》了。他和欧洲各地的学者一直保持积极的通讯联系。他还发表过一些关于神学和政治主题的小册子, 其中有一本导致他在 1667 年入狱。

鄂雷森, 诺曼底的主教, 著有 *Algorismus Proportionum* (《比例计算》) 一书, 书中陈述了分数指数的概念。他还提出过一种方法, 借助于粗略的坐标系把平面上点的位置表示出来。

奥利金(别名阿达曼提乌斯), 生于公元 3 世纪左右。他是早期基督教创始人中最伟大的人之一, 教授过哲学和神学, 写过一些神学论著, 其中之一导致他入狱, 于 Dacian 迫害期间去世。

威廉·乌特勒,杰出的英国数学家和神学家。他的《数学入门》(1631)一书享有极高声誉。该书所讨论的是小数、比例、偏差方程的数值解和作一正方形使其面积等于给定矩形的方法,以及与此类似的几何问题。该书文字晦涩,其符号颇为混乱,令人难以阅读。他还编过一本三角论著(《三角学》,1657),有人认为计算尺的发明乃是他的功劳。

乌特勒是忠实的保皇党员,据说他是听到查理二世复辟的消息后,由于快乐过度而去世的。

帕西欧洛(帕克西奥里或帕西奥里),一位方济各会的修道士,擅长于数学研究。他在佩鲁贾、罗马、那不勒斯、米兰、佛罗伦萨和博洛尼亚都教过数学。其 *Summa de Arithmetica* (《算术集成》,1494)一书讨论了简单的二次代数方程和算术四则运算。和当时所有其他数学家一样,他只是取正根。该书很少有什么内容是利奥纳多的《算盘书》中所没有的,但其记法比较好。

派帕斯,生于公元3世纪末。除了《数学集》一书外,对欧几里得的《几何原本》和《参考书》以及托勒密的《天文集》还写过一些注释。其著作考察了公元以来头3个世纪的数学工作,因而具有巨大的历史价值,我们关于希腊数学的大多数知识就是从它们得来的。

安东尼·巴伦,在巴黎教过数学。他对笛卡儿的解析几何特别有兴趣,曾把它推广到三维的情形。

帕斯卡,法国数学家和哲学家,在极年轻的时候就已显示了自己的天才。他是一位天赋异常的人,但其短短的一生中,只有一部分时间用于研究数学。他在《圆锥曲线简论》中阐发了一些全新的几何观念。他发明过一种计算机,发现了摆线的许多性质,并和费尔马一起奠定了概率论的基础。对流体静力学这门科学也有贡献,写过一篇关于流体平衡的短论。1654年他放弃数学研究,加入了“Port-Royal 的先生们”。他有写作才能,其 *Pensées* (《思想》) 和 *Lettres Provinciales* (《外省来信》) 被公认为文学名著。

柏拉图, 哲学史上最伟大的名人之一。苏格拉底的弟子和朋友。他游历很广, 访问过埃及、南意大利和西西里岛, 在西西里岛见到毕达哥拉斯。他于公元前 389 年返回雅典, 在那里创建了他的学园。虽然他主要是哲学家, 但对数学研究也有过巨大的推动作用。他认为数学研究乃是智力发展所不可缺少的。他对严密定义与逻辑证明的坚持, 促成了数学的科学化。

庞赛莱, 一位有数学研究才能的法国军人, 入伍前曾在工科大学受业于蒙日门下。从莫斯科撤退时被俘, 在囚期间埋头于数学研究, 奠定了他的射影几何理论的基础。回到法国后便精心推敲他的发现, 于 1822 年把它们出版成 *Traité des Propriétés projectives des Figures* (《论图形的射影性质》) 一书, 这是研究这门学问以来最重要的著作之一。

波尔巴哈, 维也纳的数学和天文学教授。曾着手把托勒密的《天文集》从希腊原文本翻译成拉丁文本, 代替了过去通过阿拉伯文本转译过来的有缺点的译本, 但是直到去世尚未完成这项工作。

托勒密, 公元 2 世纪后期亚历山大学派中有名的数学家和天文学家。他收集了前人所有的天文学发现, 此外还增加了自己的许多观测材料, 这些就构成了其巨著《句法》的内容, 阿拉伯人结果把它叫做《天文集》。有人认为三角学是由托勒密发明的, 但目前似乎完全可以肯定, 他在这方面的工作大都归功于喜帕恰斯(参看第三章)。

毕达哥拉斯, 生于萨摩斯岛。为了逃避暴君波莱克拉兹的统治曾移居南意大利, 从而创立了克劳登的团体。他是一个博学的人, 游历很广。普罗克洛斯曾宣称, 比例理论的发现和规则图形(五种正多面体)的作图法应归功于毕达哥拉斯。

数学作为一门科学始于毕达哥拉斯, 欧几里得《几何原本》中有许多内容来自毕达哥拉斯及其学派。据传说, 他丧身在他学园的一次火灾中, 这次火灾是由他的政敌和宗教方面的敌人纵火而致。

罗伯特·里柯德, 威尔士数学家。他起先在牛津后来在剑桥学习, 在剑

桥取得医学学位,以后担任爱德华六世的医生。其《艺术基础》(1540)一书是用英文出版的最早一部数学著作,是一部“讲授正确的计算办法和实际应用等等”的论著,它流传很广,对中世纪的数学进展起了巨大影响。书中使用了“+”号和“-”号,在以后一部著作《智慧的激励》(1557)中出现了“=”。他还写过一本《知识的道路》(1551),差不多是欧几里得《几何原本》一书的摘要。

雷乔蒙塔努斯(约翰·穆勒),生于哥尼斯堡。他也许是自比萨的利奥纳多以来最有影响的一位数学家。他是波尔巴哈的学生,曾完成他老师对《天文集》的翻译工作。他最著名的著作《论各种三角形》(1464)是对数学的重要贡献。在这本书里,三角学开始作为一门独立科学出现。1475年他发表了一张正弦和正切函数表,以1'弧为间隔,这张表对天文学家和航海家说来是重要的。雷乔蒙塔努斯还是用代数解决几何问题的先驱者之一。

黎曼,德国伟大的数学家。曾在哥廷根受业于高斯门下,后在柏林学习,在这里接触到一些伟大的数学家,例如狄里赫利、雅可比、斯坦纳、爱森斯坦。后来回到哥廷根,他在博士论文 *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer Veränderlichen Complexen Grösse* (《复变函数一般理论基础》)中奠定了复变函数一般理论的基础,这篇论文立即确定了他作为第一流数学家的声誉。他曾继狄里赫利在哥廷根担任数学教授,在其就职讲演(Habilitationsschrift) *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (《几何学的基本假设》,这个题目是高斯建议的)中,发展了罗巴切夫斯基和其他人所开辟出来的非欧几何体系。但他远远超过了前人,因为他所讨论的空间可以是任意维数的(《黎曼几何》)。他还写过椭圆函数方面的著作 (*Elliptische Funktionen, Vorlesungen mit Zusätzen*,《椭圆函数,讲义及附录》,1869)和偏微分方程的著作 (*Partielle Differentialgleichungen*,《偏微分方程》,1869)。他关于多周期函数的论文(见 *Borchardt* 杂志,1877)对数学是一个极有价值的贡献。

盖尔·潘尚·狄·罗伯佛尔,有名的数学家,生于比乌外斯,1627年赴巴黎,在那里接触到许多学者(包括梅尔生在内),并成为数学教授。

科学院成立时(1666),他是其第一批院士之一。他发展并改进了卡佛来利的极微分割法,并声称他曾预见到卡佛来利和其他意大利数学家所发现的这个方法的原理。他似乎有些卖弄自己,曾和托里切利与笛卡儿激烈争吵过。他研究过平面曲线,特别是摆线,他的切线作法是走向微积分的明显一步。他还写有力学著作,设计出一种以他的名字命名的天平。

萨开里,一位耶稣会会员,曾在各地(例如都灵、巴维亚等)的教会学校中教授神学、逻辑学、心理学和数学。除了在第十四章提到的著作以外,他还写有 *Quaesita Geometrica* (《几何问题》, 1693), *Logica Demonstrativa* (《证明逻辑》, 1701) 以及许多神学著作。

舒腾,尼德兰人,曾继其父在莱顿担任数学教授。他在 1649 年出了一版附有注解的笛卡儿的《几何学》, 1659 年再版。两年后发表了他的 *Principia Matheseos Universalis* (《一般算术原理》), 1657 年发表了 *Exercitationes Mathematicae* (《数学练习》)。

萨格纳,起先当医生,后在耶拿教授物理学和数学,在哥廷根和哈雷也执教过。著有力学和物理学方面的论文及 *Elementa Arithmeticae Geometricae* (《算术和几何原理》, 1730) 一书。

史密斯,爱尔兰数学家, 1861 年成为萨弗尔几何学教授。他专门研究过椭圆函数,就这个题目给《皇家学会会报》写了许多论文。他还广泛地写过数论方面的东西。1894 年发表了《史密斯数学论文集》。

斯坦纳,著名的瑞士几何学家。出身微贱,但很快就在数学界跃居显要地位, 1834 年在柏林成为数学教授。他的研究工作主要限于几何方面。

西门·斯特文(斯特文那斯),生于布鲁日。他也许是中世纪荷兰的一位最有影响的数学家。他的声望主要是靠他在力学和流体静力学上的贡献得来的,这两门学科在他手里获得了自阿基米得以来第一次的具体进展。他确立了斜面原理(参看第八章),讨论了流体静力

学中的问题。他还对代数特别是关于代数符号作过显著贡献,并且是第一个说清楚小数理论的人。他的 *Euvres Mathématiques* (《数学著作》) 发表于 1634 年,其中包括狄奥芬塔斯的六卷代数,前四卷是取斯特文的译本,另外两卷是取吉拉德的译本。

迈克尔·史替福,原是僧人,后来改信路德教,曾在耶拿担任数学教授,是 16 世纪德国最伟大的数学家。他的 *Arithmetica Integra* (《整数算术》,1544) 主要是一本代数论著,相当有价值。他在 1546 年出了一版克里斯多夫·鲁道夫的《代数》。

斯特林,知名的苏格兰数学家。先在格拉斯哥,后在牛津的 Balliol 学院受教育。由于他和杰出的雅可比家族交往,而被该学院开除,于是前赴法国。在法国接触到尼古拉斯·伯努利,最后成为数学教授。他在 1725 年返回伦敦继续进行数学研究,给《皇家学会会报》写了大量论文。

西尔威斯特,著名的英国数学家。受教于剑桥的圣约翰学院,在那里结交了凯利。相继在伦敦的大学学院、伍利治陆军军官学校和约翰斯·霍普金斯大学做过数学教授。从 1883 到 1894 年在牛津任萨弗尔几何教授,1859 年当选为皇家学会会员,1880 年获得该会的 Copley 奖章。

他对数学,特别是对不变量理论(和凯利一起)、数论、方程论和微分方程都有过重要贡献。

塔尔塔格里亚,生于布雷西亚,出身非常贫苦。他是意大利最伟大的数学家之一。由于热心数学,1546 年他在威尼斯获得讲师职务。利用所谓卡尔丹法则进行的三次方程解法,是由他提出的。他也写过力学著作,曾把他的数学知识应用到射击学上。他的 *Nova Scientia Inventa* (《新发现的科学》,1537) 是最早出现的一部关于射击的理论和实践的著作。

布鲁克·泰勒,受教于剑桥的圣约翰学院。在转向数学之前研究法律,由于给《皇家学会会报》写了一些论文而崭露头角。这些论文使他

当选为皇家学会会员,最后成为该会秘书。他曾被任命到一个为了解决牛顿和莱布尼兹关于微积分发明权之争的委员会中担任委员之职。他的主要著作已在第七章提及,此外他还给《皇家学会会报》写过各种论文,它们涉及到对数(《计算对数的新方法》)、级数(*De Seriebus infinitis Tractatus*,《论无穷级数》)以及数学在物理和力学问题上的应用。从1715年到1717年他放弃了数学,转向宗教和哲学。

泰利斯,希腊七贤之一。他游历很广,旅行中学到了埃及人的几何学和巴比伦人的天文学。他是第一个为数学而对数学有兴趣的希腊人。他给古人的几何知识提供了逻辑论证,从而铺平了我们在毕达哥拉斯工作中看到的科学地研究数学的道路。

伊凡咎利斯塔·托里切利,伽利略的学生,继承了伽利略在佛罗伦萨的数学教授职务。他以毕生不倦的热情从事数学和物理学的研究,水银晴雨计的发明就是和他的名字紧密联系在一起。在《几何著作》(1644)一书中,他把力学原理推广到流体上。他还研究过摆线的性质。

弗兰西斯·韦达,16世纪最伟大的代数学家。早年研究法律,曾为雷恩的顾问。后来他转向数学,曾解出一种复杂的西班牙密码,从而第一次显示了自己的数学才能。他的 *In Artem Analyticam Isagoge* (《分析方法异论》)出版于1591年,通常认为它乃是最早的一本符号代数著作。他的《方程的认识和订正》(1615)是方程论发展中的一个重要的里程碑,包含有他最出色的工作成果,其中有三次方程和四次方程的解法。他还发现了一个表示 π 的值的无穷乘积。

约翰·沃利斯,英国数学家,牛顿的前辈之一。他是极有天赋的人。他的《无穷算术》(1656)是一部有着明显价值的著作(参看第七章),对于奠定微积分的基础,这部著作也许比任何其他著作的贡献都大。他对力学也有过重要贡献(《力学,或论运动》,1670)。他的代数大多是历史性的,但的确作了重要贡献,特别是对方程的研究。然而,由于他对自己同胞的激烈宗派行为以及对法国数学家(尤其是对笛卡儿)的敌意,使得他的光彩有所逊色了。

约翰·韦曼,1489年写过一本代数书,书中自由地使用了“+”号和“-”号。

雷恩,名建筑师,也是一位同样著名的数学家和天文学家。曾任格雷欣学院的天文学教授(1657~1661)和萨弗尔天文学教授(1661~1673)。他在后来组成皇家学会的那批人当中是一个杰出的成员,从1680年到1682年担任该会会长。他是一位极有才能的数学家,牛顿对他的工作有过很高评价。1663年左右致力于建筑学,在1666年的大火之后进行了重建伦敦城的设计。据说,全部52所伦敦教堂的设计他都出过力,但其中有些也可能是胡克的工作。

芝诺,斯多葛学派的哲学家,巴门尼德的弟子。他那些著名的悖论(参看第二章)收集在亚里士多德《物理学》的第六卷中。

附录二

对书中提到的某些论题的简短注释

复数 二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解是 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 。仅

当 b^2 不小于 $4ac$ 时, 这个解才可能是实数, 否则就没有实数解。在

这种情形下, 可令 $x = \alpha + i\beta$, 此处 α 是 $-\frac{b}{2a}$, β 是 $\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$, 而 i 是

虚数 $\sqrt{-1}$ 。 i 这个量遵从普通的代数规则, 它和普通的数即实数一样, 完全可以参与所有的数学运算。如果 x 和 y 是实的量, 则 iy 便是纯虚的量, $x + iy$ 是复量。

复数的引进使得通常的代数法则具有完备性。因此, 如果给予复数和实数同样的地位, 我们就可以说, 有 n 个 x 值满足 x 的 n 次方程。事实上, 除非承认复数, 否则代数基本定律 (即每个方程都有一个根) 就立刻不成立了。

此外, 如果同意把数的观念加以推广, 使之包括复数, 也可以扩大基本几何定理的范围。例如, 直线 $y = mx + c$ 与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 相交于两点, 其横坐标是下列方程之根:

$$x^2(1 + m^2) + 2mcx + c^2 - a^2 = 0$$

这些根是实根、重根还是虚根, 要看

$$m^2c^2 - (1 + m^2)(c^2 - a^2) \text{ 或 } a^2(1 + m^2) - c^2$$

是正数、零还是负数。因此, 若 c^2 大于 $a^2(1 + m^2)$, 直线就不会与圆相交在那些可以在图形上表示出来的点上。但如引入复数, 我们就可以一般地说, 直线永远与圆相交于两点, 这个说法是绝对正确的, 不过交点可能不是实在的点。

复数 $x + iy$ 可以用 r 和 θ 表示成 $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 的形式, 此外

$\tan \theta$ 是 $\frac{y}{x}$, r 是 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 。用作图表示复数的方法乃是高斯想出来的。

复变数 考虑一个 z 的有理整多项式, 其系数是实数或复数, 例如:

$$f(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

其中 $z = x + iy$ 。当 x 和 y 取所有可能的实数值时, z 的值发生相应变化, 所以我们称后者为复变数, $f(z)$ 则称为复变函数。对于这个问题的详尽论述, 读者可参看菲力浦《复变函数论》, 1951。

画法几何 是一种几何学的名称。早期几何学家虽然并非不知道它, 但是直到 18 世纪末, 才由伽斯帕·蒙日第一次系统地发展了它。它所讨论的是这样一种方法: 借助两个互相垂直的投影, 比如说水平投影和铅直投影, 把一个三维物体表示在二维的平面上。而把铅直投影旋转 90° 以后, 两个投影就处在一个平面上。这种作法称为“嵌接”。蒙日研究了这样表示在二维平面上的图形的线和面, 就能解释它在三维空间中的性质。

椭圆积分和椭圆函数 大家知道, 所有的连续函数都可积分。但是, 想把一些简单问题中出现的某些普通积分用初等函数表成有限形式的尝试, 往往遭到失败。例如, 为了确定椭圆 $x = a \cos \phi$, $y = b \sin \phi$ 的四分之一弧长, 通常的步骤导致下列积分

$$a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - e^2 \cos^2 \phi)^{\frac{1}{2}} d\phi$$

它不能当做有限多个通常的初等函数来计算。

一个 x 和 y 的有理函数, 如果其中 y 是 x 的二次函数的平方根, 它就很容易借助熟知的初等函数来积分。此外, 对于函数 $f(x, \sqrt{R})$ 的积分, 此处 f 是任意有理函数, R 是变数 x 的线性函数或二次函数, 使用通常的初等方法一般就够了。然而, 如果 y 是 x 的三次或四次函数的平方根, 这些初等方法就都无效。这种情形下的积分可以用某些基本定积分表示出来, 这些定积分是它们上限的函数, 称为“椭圆函数”。应当指出, 椭圆函数与椭圆的关系, 并不同于圆函数或双曲函数与圆或双曲线的关系。椭圆积分中“椭圆”名称

的得来,是由于在求椭圆弧长的表达式中出现有这些积分。

有三种不同类型的椭圆积分。第一类积分由下列关系定义:

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

亦即,若 $t = \sin \theta$, $x = \sin \phi$, 则

$$u = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

这是一个重要的积分。在确定长为 1 的单摆的周期时要出现这个积分,若此单摆在铅垂线的每侧摆动的角度是 a , 则其周期为

$$4\sqrt{\frac{1}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1-k^2\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

其中 $k = \sin \frac{a}{2}$ 。(如果 a 角无限小,则此积分变成 $4\sqrt{\frac{1}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$, 即 $2\pi\sqrt{\frac{1}{g}}$, 这就是摆动很小的单摆周期的常用公式。)

勒让德系统研究过椭圆积分的问题。从高斯的笔记中可以清楚地看出,高斯早在 1801 年就已经考察过椭圆函数的特征和性质,发现它们有一个特殊性质,即双周期性,但他什么也没有发表。直到将近 20 年后,阿贝尔和雅可比才又注意到这个基本性质。关于椭圆积分有一个最惊人的发现要归功于阿贝尔。他认识到,为了完成这种一直使前人为难的积分,必须发明一种新的函数,即椭圆函数。为此,他“颠倒”了 ϕ 和下列积分之间的关系:

$$\int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

即像拉格朗日所做的那样,把 ϕ 当做积分的函数来处理,而不是把积分当做 ϕ 的函数。为了理解这样做的意义,让我们考察前面的积分

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

令 $k=0$, 则有

$$u = \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}$$

它是 $\sin^{-1}x$, 因而我们可以把 $\sin^{-1}x$ 定义为积分

$$\int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}$$

同理,函数 $\tan^{-1}x$ 可以定义为

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

而 $\ln x$ 可定义为

$$\int_1^x \frac{dt}{t}$$

由于从椭圆积分过渡到椭圆函数,致使这个论题在雅可比 (*Fundamenta Nova Theoriæ Functionum Ellipticarum*, 《椭圆函数论新基础》, 1829)、维尔斯特拉斯 (1815 ~ 1897) 和厄密 (1822 ~ 1901) 的手中得到非常广泛的发展。

至于进一步的论述,读者可参看 Whittaker 和 Watson 的《现代分析》。

不变性 书中已经见到一些关于不变性的例子,例如,四个共线点在投影时交比的不变性。最早一个例子是在笛卡儿的《几何学》中出现的,书中把 $2n$ 次曲线和 $2n-1$ 次曲线合并在一起,称为亏格 (genus) 为 n 的曲线。笛卡儿在这里指出,这个数与基本坐标的选择无关。用现代的话来说,在坐标轴变换之下,它是一个不变量。晚近这个名词的意义已经变得相当广泛。

考虑一个二元二次式

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

若用 $lx + my$ 代替 x , 则 $Lx + My$ 代替 y (这称为线性变换), 则此表达式变成

$$a(lx + my)^2 + 2b(lx + my)(Lx + My) + c(Lx + My)^2$$

即

$$x^2(al^2 + 2blL + cL^2) + 2xy(alm + blM + bLm + cLM) + y^2(am^2 + 2bmM + cM^2)$$

它可写成

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

$$A = al^2 + 2blL + cL^2$$

$$B = alm + blM + bLm + cLM$$

$$C = am^2 + 2bmM + cM^2$$

此处

容易证明,

$$AC - B^2 = (ac - b^2)(lM - Lm)^2$$

这就是说,变换后二次式的判别式等于原有二次式的判别式乘以行列式 $(lM - Lm)$ 的平方,这个行列式叫做变换的模。这就导致下列定义:一个代数形式的系数的任意函数称为一个不变量,如果这个代数形式通过线性变换,则该系数函数等于原来的函数乘以变换的模的某个一次幂。这里“代数形式”一词是用来表示一个齐次多项式。二次、三次、四次……的代数形式称为二次式、三次式、四次式……两个变数的代数形式叫做二元代数形式,三个变数的叫做三元代数形式,等等。

在19世纪期间,关于不变性的问题显得有巨大的重要性,曾引起许多著名数学家,特别是布尔、凯利和西尔威斯特的注意。

至于详尽地论述这个问题,读者可参看 H. W. Turnbull 的《行列式、矩阵和不变量的理论》,1928。

等周问题 它最初和对周长(或周边)相同的图形的研究有关。例如,希腊人已熟悉在周长相同的所有平面图形中,求最大面积的图形问题。与此类似的还有这样一个问题:在面积相同的所有三角形中,要求证明周长最小的三角形是等边三角形。一般地说,我们是考虑许多个定义相同的几何图形,例如考虑面积(或周长)相同的许多平面图形,要求确定其中何者具有所指定的性质,例如其周长(或面积)最大(或最小)。

这项研究在詹姆士·伯努利和约翰·伯努利那里受到最大的推动(参见第七章)。后者证明了这个问题与确定这样一条曲线是同一类型的问题:一个仅仅在本身重量作用之下的质点沿此曲线从静止状态滑行到给定地点所需的时间要最短。对这个问题和类似问题的研究导致变分法的发明,它是微积分的一个重要的分支。

关于等周问题的详尽讨论可参看马赫《力学科学》,1902,421 ~ 446 页。

最小作用量 作为研究光线的反射和折射的结果,费尔马曾得出这样的结论:“自然界总是通过最短途径发生作用的。”此后,莫培督在其1744年的一篇著名论文中宣布了一个原理,他称之为“最小作用量

原理”。他用这样几句话说明了这个原理：“自然界总是通过简单的方法产生其作用的。如果一个物体必须没有任何阻碍地从这一点到另一点……自然界就得利用最短的途径和最快的速度来引导它。”(原先一直不能并存的自然界各种规律现在就一致起来了。《科学院的报告》，1744年4月15日，第421页。)简单地说，这意味着任何不受外界影响的动力学系统在发生变化时，其变化方式总是使有关的作用量为最小。莫培督把作用量定义为质量、空间和速度的连乘积，这个定义在18世纪期间导致无止无休的争论，但终于在19世纪得到了解决。

关于这个原理的详尽讨论，读者可参看马赫《力学科学》，1902，364~380页。

最小二乘法 任何物理测量都不是绝对准确的。不同观测者对同一量的测量，即使测量是在尽可能接近相同的条件下进行的，也必然会显示出细微的差异，这是由于许多因素，包括观测者的“个人要素”所致。为了尽可能消除由这些原因产生的一些误差，从一堆各不相同的测量结果中把一个量最可靠的量度确定下来，统计学家采取了种种不同的方法，其中最重要的一种就是**最小二乘法**。

这个方法所依据的原理如下：物理量的任何一次观测中的所谓“剩余误差”，是指被测之量的最可能数值和观测者得到的实际测量结果之差。在最小二乘法里，一个量的最可能数值就是使各次剩余误差平方和为最小的那个数值。

这个方法曾由勒让德所发现，发表在他的 *Nouvelles Méthodes pour la détermination des Orbites* (《确定轨道的新方法》，1809) 中。他把它称为“最小平方数法”。如今已经了解，高斯早在1805年就已发现了它，但对它的研究在其 *Theoria Motus* (《运动理论》) 一书中才首次发表，即是在勒让德的著作出版以后不久。关于它的第一个证明是拉普拉斯提出的(《概率的分析理论》)。

非欧几何 是一种几何系统的名称，这种几何没有把欧几里得的全部公理采纳进来，特别是比较可疑的一条公理，就是有关平行线的著名公理。非欧几何的目的在于用其他假定来代替这条公理。其中有一种非欧几何(双曲型几何)除了这条暧昧的公理以外，把所有的

欧氏公理都接受下来,而把这条公理用这样一个假定代替:通过平面上任一给定点可以作两条或两条以上的直线不和平面中给定的直线相交。在这种几何系统里,三角形的三内角小于 180° 。在椭圆型几何里,平行公理被另一公理所代替,它假定平面上没有一条线不和给定的线相交,我们所要做的,只是把它们延长到足够远。

射影几何 可以认为,它是研究几何图形的那些在射影时不变的性质的。

试考虑任一完全处于平面上的图形,再考虑该平面外的一点 V 。假定我们从图形上的每一点向 V 点作直线,这些线构成一束从 V 点出发的射线。现在假定这个线束和不通过 V 点的第二个平面相割,这个平面与从 V 点出发的该线束的交点构成一新的图形,我们称它为原平面图形在上述相割平面上的射影, V 点叫做射影顶点,射影到上面的那个平面叫做射影平面。如果 V 点在无穷远,就称射影是平行的;如果再假定从 V 点出发的线束垂直于射影平面,则称射影是正交的,否则就称射影是中心的,或锥顶的。原图形上的每个点和线在射影上都有其映像,但通常的度量关系,例如两点之间的距离或两直线之间的夹角,不再保持原状。

然而,德扎尔格所发表的定理启示了一条新的思路,就是考虑那些与测量无关,因而在射影时不变的性质,其中一个就是四个共线点的交比。这就促使几何学家去研究那些在射影中保持不变的性质。

为了保证有关射影定理的普遍性,有必要假定某些“理想”元素的存在,例如无穷远点与无穷远线的存在。每条直线上被认为有一点位于无穷远,并且每条直线平行于给定直线这件事,说成是和它相交于无穷远点。给定直线上只有一个无穷远点,如果认为有两个无穷远点,就会违背欧氏几何的一条基本公理,即两条共面直线只能相交于一点。

无穷远点构成无穷远线。诸平行线在同一点(理想的点)和无穷远线相遇。无穷远线这个名称,就是指这种点的集合。

如果用解析方法来考虑,我们可以说,两条平行线

$$ax + by + c_1k = 0$$

$$ax + by + c_2k = 0$$

在 $k=0$ 处相遇。因此这就是无穷远线的方程。因为圆的方程可以写成

$$x^2 + y^2 + 2gkx + 2fky + ck^2 = 0$$

所以它在 $x^2 + y^2 = 0$ 处,即在 $y = ix$ 或 $y = -ix$ 处和无穷远线相遇。因此所有的圆都与无穷远线相割于同样两点,即直线 $y = ix$ 和 $y = -ix$ 上的两个无穷远点。它们叫做无穷远圆点。

晚近的哈代教授曾用这样几句话很清楚地说明了分析中的无穷大和几何中的无穷大的区别(《纯粹数学》,1955,502页):“这些概念(无穷元素)和分析中的极限学说没有一点关系。……分析中的无穷大是一个‘极限’,而不是‘实际的’无穷大。……但在几何中,无穷大是实际的无穷大,而不是一个极限。‘无穷远线’作为一条线的意义完全和其他的线作为线的意义一样。”关于这个问题的详尽论述,读者可参看哈代的论文《什么是几何学?》(《数学公报》,12卷,1925,309~316页)、菲隆《射影几何引论》(1935)、哈拉与瓦得《射影几何引论》(1937)。

五次方程 一个任意次数的方程,当其系数是数字时,要确定满足这方程的一个数值或几个不同数值的问题通常并没有什么困难,在所有的情形下都可以求得解,达到任意要求的精确度。当系数是文字,我们要用这些系数去求一个任意次数的方程的解时,困难就产生了。在二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的情形下,根可以用系数表示出来,无论系数是什么,这样说都是对的。我们曾看到,人们已经想出了用系数求三次方程或四次方程解的方法,因此,自然应当努力去解决用系数表示更高次数方程之根的一般方法的问题。

詹姆士·格雷果里充分考虑过这个问题,他确信自己已经想到一种方法,可以利用一个辅助方程把任意次数的方程解出来。他未能认识到,在方程高于四次的情形下,这个辅助方程比起要求解的方程来更为复杂。

在欧勒和拉格朗日求解的尝试遭到失败之后,人们就开始认真研究寻找可解条件的问题。阿贝尔首先确定了不可能借助根号和其他通常的运算符号,通过有限个运算步骤,用系数把五次(或更高次数的)方程的根表示出来。这点一经确定之后,下一步就是要去发现哪一类函数能导出四次以上方程的解。吉拉德证明了,对于三

次方程可以使用三角函数。1858年厄密说明了怎样通过一种要用到椭圆函数的方法,来求得五次方程的解。

对称函数 方程之根的对称函数是这样一种表达式,在这种表达式中,所有的根的方次相同,并且当我们交换任意两个根时,表达式保持不变。举一个简单的例子。三次方程

$$(x-a)(x-b)(x-c)=0$$

或 $x^3 - x^2(a+b+c) + x(ab+bc+ca) - abc = 0$

的根显然是 a, b, c , 如果把 a 写成 b , b 写成 c , c 写成 a , 则诸根之和的表达式保持不变, 同样, 两两的根相乘之和或者诸根之积的表达式也保持不变。一般地说, 如果在方程

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

中, 根是 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ 那么大家知道,

$$a_1 = -(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \cdots)$$

$$a_2 = (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \cdots)$$

$$a_3 = -(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \beta\gamma\delta + \cdots)$$

显然, 如果在任何一个表达式中交换字母 a, β, γ, δ , 则它们所在的那个表达式的数值不变。

数论和二次互反律 数的一种最基本的分类方法就是把它们分为素数与合数。除了通过试验之外, 目前还不知道有什么方法能在给定范围内把全部素数列出来。欧几里得曾证明素数是无限多的。两个数除了1以外没有其他公因子时, 就说它们相对是素数或者是互素的。

数论的建立是为了研究正负整数的性质。用一个简单的例子来说: 所有偶数的平方都有 $4n$ 的形式, 所有奇数的平方都有 $8n+1$ 的形式。然而, 数论中大多数问题的解决需要用到较高深的数学。我们可以举两个费尔马问题作为例子:

1. 若 p 是任一素数, n 是一不能被 p 除尽的整数, 则 $n^{p-1} - 1$ 可以被 p 除尽。例如 p 是 5, n 是 7, 则 $n^{p-1} - 1$ 是 2400, 它显然可以被 5 除尽。

2. 任何形如 $4n+1$ 的素数 (n 是整数), 都能而且只能以一种方法表示成两个平方数之和。例如 $4 \times 9 + 1 = 37 = 6^2 + 1^2$ 。这些都是

数论中称为数的划分这个分支里的例子。

有理数 能表成两整数之比的数叫做有理数。不能这样表示出来的数叫做无理数,例如 $\sqrt{2}$ 。数也可以是代数数或超越数。

二次剩余 如果用熟知的短除法把自然数 $1, 2, 3, \dots$ 的平方除以 7 , 余数是 $1, 4, 2$ 而不是其他的数,那么,这些数就叫做 7 的二次剩余,其他比 7 小的整数叫做 7 的二次非剩余。一般地说,如果任一整数 r 与 m 互素,并且 r 与某一平方数相差 m 的一个倍数,则 r 便是 m 的二次剩余。否则就是二次非剩余。例如,若 m 是 15 , 1 和 4 就是 15 的二次剩余,因为 $\frac{4^2-1}{15}$ 是整数, $\frac{7^2-4}{15}$ 也是整数。

高斯在其《研究》中证明了许多极妙的定理,其中有这样一个:

2 是所有形如 $8n \pm 1$ 的素数的二次剩余,是所有形如 $8n \pm 3$ 的素数的二次非剩余。换句话说,如果 $8n+1$ (或 $8n-1$)是素数,就可能找到一个 x 值,使得它的平方除以 $8n+1$ (或 $8n-1$)后余数为 2 ,但如果这个素数是 $8n+3$ (或 $8n-3$)的形式,这样的 x 值就不可能有了。例如取 $n=2$,则 $8n+1$ 是 17 ,它是素数。当 $x=6$ 时同余式可满足,即 6^2-2 可被 17 除尽。若 $n=1$,则 $8n-1$ 是 7 ,它是素数,当 $x=3$ 时同余式是满足的。

另一方面,若 n 是 2 ,则 $8n+3$ 是 19 , $8n-3$ 是 13 ,两者都是素数,没有一个 x 的值能使 x^2-2 被 19 或 13 除尽。

二次互反的理论是由高斯建立的,他给出了这个定律第一个严格的证明,发表在《研究》的第四部分中。

假定 p 和 q 是二素数,考虑两个同余式 $x^2 \equiv q \pmod{p}$, $x^2 \equiv p \pmod{q}$ 它们是否可解? 为了回答这个问题,要注意 p 和 q 两者都是素数,因而具有 $4n+1$ 或 $4n+3$ 的形式。换句话说就是,当 p 和 q 各被 4 所除时,其余数是 1 或 3 。

假定 p 和 q 两者都是 $4n+1$ 型的数。例如令 $p=13$, $q=17$ 。在这种情形下,两同余式 $x^2 \equiv 13 \pmod{17}$ 和 $x^2 \equiv 17 \pmod{13}$ 都是可解的,前者之解是 $x=8$,后者是 $x=11$ 。但若假定 $p=17$, $q=5$,显然就没有一个整数值的 x 适合同余式 $x^2 \equiv 17 \pmod{5}$,也没有一个 x 值能适合同余式 $x^2 \equiv 5 \pmod{17}$ 。

现在考虑两个形如 $4n+3$ 的素数,例如令 $p=11$, $q=19$ 。要同

余式 $x^2 \equiv 11 \pmod{19}$ 是可解的, 令 $x = 7$ 即可, 但没有一个 x 的值能满足同余式 $x^2 \equiv 19 \pmod{11}$ 。因此我们有下列规则:

在同余式 $x^2 \equiv q \pmod{p}$ 和 $x^2 \equiv p \pmod{q}$ (p, q 是素数) 中, 若 p, q 都具有 $4n+1$ 的形式, 则此二同余式都可解或都不可解, 但若 p 和 q 都具有 $4n+3$ 的形式, 则其中有一个同余式可解, 另一个不可解。由于这个结果的对称性, 勒让德使用“互反”的名称来称呼这个极妙的定理。

柯西对数论还有其他贡献。他解决了费尔马的一些最困难的问题。雅可比也研究过这个课题, 并把他对这个课题的研究和他在椭圆函数方面的研究联系了起来。1859 年黎曼出版了一本名著, 讨论求给定数以下素数个数的方法。1844 年刘维尔证明了 e 和 e^2 两个数都不可能是一个系数为有理数的方程的根, 这就导致对超越数的研究(参照该条)。近年来, 兰道对这个课题作出了有价值的贡献。

三体问题 给定三物体, 其中每一个都按照引力定律吸引着其他两物体, 此外没有其他影响, 预言由此产生的运动以及每一物体位置的问题, 通常叫做**三体问题**。在牛顿发表万有引力定律之后, 这个问题就引起了许多著名数学家的注意。一般的解未能得到, 使牛顿的继承者感兴趣的一个特殊问题是, 要确定一个由于第三者的作用而绕一中心物体运动的物体在运动(微扰)中的扰动情况。例如, 由于受太阳牵引力的作用, 月球在其绕地球的轨道上是如何运动的? 又例如, 由于受邻近行星牵引力的影响, 一个行星绕太阳的运动如何? 牛顿研究过太阳、地球和月球彼此之间相互吸引的问题, 从牛顿的通信中我们可以知道许多这方面的内容。拉格朗日等人也研究过这个问题。

超越数和超越函数 数可以分为代数数和超越数两类。如果 a_0 不是零, 并且多项式

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

的每个系数是整数, 则方程 $f(x) = 0$ 的每个实根或复根叫做代数数, 换句话说, 代数数是有一个未知数的整系数多项式方程的根。非代数的数叫做超越数。 $e = 2.718\ 28\cdots$, $\pi = 3.141\ 59\cdots$ 都属于这类

数。对这些数的超越性给出第一个严格证明的是林德曼,虽然早在1667年J. 格雷果里就曾试图提出证明了。

函数也分代数函数和超越函数两类。如果 y 是一个 n 次方程的根,这方程的系数是 x 的有理函数,则称 y 是 x 的 n 次代数函数。非代数的函数是超越函数。三角函数 $\sin x, \cos x, \tan x$, 等等,它们的反函数 $\sin^{-1} x$, 等等,指数函数 e^x 、对数函数 $\log x$ 和双曲函数,等等,都是比较一般的超越型函数。

参考书目

以下是一份与数学史有关的参考书目,作者曾充分地查阅了这些书籍,并从中获得了许多有价值的材料。这些书中的大多数,即使不是每一个学数学史的学生所能获得的,也是不难理解的。其中有些书已在本书正文中提到。

BALL, W. W. R., *A Short Account of the History of Mathematics*, 1912. Edn. 5.

BARROW, I., *The Mathematical Works of Isaac Barrow*, D. D., 1860.

Edited by W. Whewell. *Geometrical Lectures*. Translated by J. M. Child, 1916.

BELL, E. T., *Development of Mathematics*, 1945.

BERNOULLI, JAMES. *Ars Conjectandi*, 1713.

BIRCH, THOMAS, *History of the Royal Society*, 1756/1757. 4 vols.
(Brich.)

BOYER, C. B., *The Concepts of the Calculus*, 1949. (Boyer.)

BREWSTER, DAVID, *The Life of Sir Isaac Newton*, 1831.

BURNSIDE and PANTON, *Theory of Equations*, 1892, 3rd, Edn.

CAJORI, F., *History of Mathematical Notations*, 1928 ~ 1929, 2 vols. *History of Mathematics*, 1919. (Cajori.)

Cambridge Ancient History

CANTOR, MORITZ, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 1894 ~ 1908. (Cantor.)

CARDAN, G., *Ars Magna*, 1545.

CHACE, A. B., *The Rhind Mathematical Papyrus*, 1927.

CHILD, J. M., *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*, 1920. Trans-

- lated by J. M. Child. (See also BARROW.)
- COLEBROOK, H.T., *Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahme-gupta and Bhascara*, 1817.
- COLLINS, JOHN, *Commercium Epistolicum*, 1712.
- COLSON, JOHN, *The Method of Fluxions and Infinite Series, with its Application to the Geometry of Curve Lines*, 1736.
- COX, J., *Mechanics*, 1934.
- DE MOIVRE, A., *De Mensura Sortis*, Phil. Trans., 1711.
- CB MORGAN, A., *Essays in the Life of Newton*, 1914. *Penny Cyclopædia*.
- DICKSON, L.E. *History of the Theory of Numbers*, 1919 ~ 1927.
- Dictionary of National Biography*.
- Encyclopædia Britannica*, XIVth Edn.
- FERMAT, P., *Opera Varia*, 1679.
- FINK, K., *Brief History of Mathematics*, 1875. Translated by Beman and Smith.
- FLINDERS PETRIE, W.M., *The Wisdom of the Egyptians*.
- GALILEO, G., *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche*, 1638.
- GERHARDT, C.I., *Der Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern*, 1899.
- GIRARD, A., *Invention Nouvelle en l'Algebre*, 1844. Reimpression.
- HARDY, G.H., *A Course of Pure Mathematics*, 1955.
- HARRIOT, THOS., *Artis Analyticæ Praxis*, 1631.
- HEATH, SIR T.L., *Apollonius of Perga*, 1896. *Archimedes*, 1897. *History of Greek Mathematics*, 1921. 2 Vols. (Heath, *Greek Mathematics*) *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 1908. 3 Vols.
- HOBSON, B.W., *Plane Trigonometry*, 1918. 4th Edn.
- HOOKE, R., *Diary of Robt, Hooke*, 1935. Edited by Robinson and Adams.
- HORSLEY, S., *Isaac Newton Opera*, 1779 ~ 1782. 4 vols.
- HULTSCH, *Pappi Alexandrini Collectiones*, 1876 ~ 1878.
- HUTTON, C., *Mathematical Dictionary*, 1815. 2 vols.
- HUYGENS, C., *Œuvres Complètes*, 1888 ~ 1950.

- Journal des Scavans*.
- KAYE, G.R., *Indian Mathematics*, *Isis*, 1919.
- MACH, E., *Science of Mechanics*, 1907.
- MIKAMI, Y., *Development of Mathematics in China and Japan*, 1913.
- MONTUCLA, J.P., *Histoire des Mathématiques*, 1799 ~ 1802. (Montucla.)
Miscellanea Taurinensia.
- NAPIER, J., *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, 1614.
Napier Centenary Volume.
- NEWTON, I., *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, 1687. *Mathematical Principles*. Translated by Andrew Motte in 1729. Revised by F. Cajori, 1934.
- OUGHTRED, W., *Clavis Mathematicæ*, 1631.
Philosophical Transactions. (Phil. Trans.).
- POGGENDORFF, *Biographisch – Literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der Exakten Wissenschaften*. Leipzig, 1863 ~ 1904. (Poggendorff.)
- PROCLUS, *Procli Diodachi in Primum Euclidis Elementorum Librum commentarii*, 1873. Ed. Freidlein.
- RASHDALL, H., *Universities of Europe in the Middle Ages*, 1936. New Edition.
- SARTON, G., *Introduction to the History of Science*, 1938.
- SCOTT, J. F., *Mathematical Work of John Wallis*, 1938. *Scientific Work of René Descartes*, 1952.
- SEDGWICK and TYLER, *Short History of Science*, 1929. (Sedgwick and Tyler.)
- SMITH, D.E., *History of Mathematics*, 1951. 2 vols.
- STEVIN, S., *Œuvres Mathématiques*, 1634.
- STIFEL, M., *Arithmetic Integra*, 1544.
- THOMAS, I., *Greek Mathematical Works*, 1939. Translated by Ivor Thomas.
- TODHUNTER, I., *History of the Progress of the Calculus of Variations during the 19th Century*, 1861. *History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to That of Laplace*, 1865.
- TURNBULL, H. W., *The Great Mathematicians*, 1951. *Theory of Equations*, 1952. *Mathematical Discoveries of Newton*, 1945.

VIETA, F., *In Artem Analyticam Isagoge*, 1591. *De Aequationum Recognitione et Emendatione*.

VLACQ, A., *Tabulae Sinum, Tangentium et Secantium, et Logarithmi Numerorum ab Unitate ad 10 000*.

WALLIS, J., *Arithmetic Infinitorum*, 1656.

WARD, J., *Lives of the Professors of Gresham College*, 1740.

WHEWELL, W., *History of the Inductive Sciences*, 1857. 3rd Edn. *Philosophy of the Inductive Sciences*. 1847.

蘇州大學
PDG

人名译名对照表

A

Abel 阿贝尔
Achilles 阿基里斯
Adelhard of Bath 巴思的阿台尔哈得
Agnesi, Maria Gaetana 玛丽亚·盖塔娜·阿格乃西
Ahmes 阿赫姆斯
Albategnius (Al Battani) 阿尔伯特纽斯(阿尔·伯坦尼)
Albertus Magnus 阿尔伯特斯
Alcuin 阿尔昆
Alexander the Great 亚历山大大帝
Alkarki 阿尔卡尔几
Alkayami 阿尔卡耶米
Al - khowarizmi, Mohammed ibn Musa (Alkarismi) 穆罕默德·伊本·缪莎·阿尔柯威里慈米(阿尔卡里斯米)
Al Mamun 阿尔·麦萌
Al Mansur 阿尔·蒙叟
Anaxagoras 阿那克萨哥拉

Anaximenes 阿那克西米尼
Antiphon 安替丰
Apollonius 阿普罗尼亚斯
Aquinas, Thomas 托马斯·阿奎那
Archimedes 阿基米得
Archytas 亚及他斯
Aristarchus 阿里斯塔克斯
Aristæus 亚里斯泰阿斯
Aristotle 亚里士多德
Arnauld 阿诺得
Arnauld, Angélique 安节莱克·阿诺得
Aryabhata 阿利耶毗陀

B

Babbage 巴拜奇
Bachet, Claude Gaspar 克劳特·葛斯派·勃切
Bacon, Roger 罗吉尔·培根
Baliani, Giovanni Battista 杰凡奈·拜惕司他·巴利诺
Barrow, Issac 伊索克·巴罗
Bayes, Thomas 托马斯·贝斯

Beaune, Florimond de 佛罗利蒙·狄·博恩

Bede 比德

Beg, Ulug 乌勒·贝格

Beltrami, E. 贝特拉米

Benedetti, Giovanni Battista 杰凡奈·拜惕司他·贝奈得梯

Berkeley, George 乔治·贝克莱

Bernelinus 伯纳立纳斯

Bernoulli, Daniel 丹尼尔·伯努利

Bernoulli, James 詹姆士·伯努利

Bernoulli, John 约翰·伯努利

Bernoulli, Nicolaus 尼古拉斯·伯努利

Bhaskara 巴士卡拉

Boethius 波伊提乌

Bolyai, Farkas 法卡斯·鲍耶

Bolyai, Janos 詹诺士·鲍耶

Bombelli, Raffaello 拉斐罗·邦别利

Boole, George 乔治·布尔

Boscovitch 博斯考维奇

Bossut 柏素特

Boyle 玻意耳

Bradwardine, Thomas 托马斯·卜拉都瓦丁

Brahe, Tycho 台科·布拉赫

Brahmagupta 巴拉马古他

Briggs, Henry 亨利·布里格斯

Brouncker, William 威廉·白隆葛

Bryson 白菜生

Burgi, Joost 杰斯特·别尔基

Burgundy 卜根代

C

Cantor 康托尔

Cardan, (Girolamo Cardano) 卡尔丹(哲罗姆·卡尔丹)

Carnot L. N. M. 卡诺

Cassiodorus 卡西奥多鲁斯

Catherine the Great 凯瑟琳大帝

Cauchy, Augustin Louis 奥格斯丁·路易斯·柯西

Cavalieri, Bonaventura 波纳凡妥拉·卡佛来利

Cayley, Arthur 奥瑟尔·凯利

Charlemagne 查理曼

Charles X 查理十世

Cheops 基奥普斯

Chevalier Destouches 希凡利·得斯陶切斯

Christopher 克里斯托弗

Chuquet, Nicolas 尼可拉斯·肖吉

Cicero 西塞罗

Clairaut, Alexis Claude 阿拉克西斯·克劳得·克来劳

Clairaut, Jean Baptiste 琴·巴甫惕斯·克来劳

Clavius, Jesuit Christopher 耶稣·克里斯多夫·克雷弗斯

Clement IV 克雷芒四世

Clerke, Gilbert 吉伯特·克拉克

Clerselier 克莱斯勒
 Collins, John 约翰·科林斯
 Colson 考尔生
 Columbus 哥伦布
 Condorcet 孔多塞
 Cotes, Roger 罗吉·库兹
 Crelle 克列勒
 Cremona, Luigi 鲁节·克雷蒙纳

D

D'Alembert 达兰贝尔
 Damascus 大马士革
 Dedekind 狄德金
 Democritus 德谟克利特
 De Moivre, Abraham 阿伯拉罕·棣莫弗
 De Morgan 德·摩根
 Desargues, Gerard 盖拉德·德扎尔格
 Descartes 笛卡尔
 Dido 黛多
 Diocles 地奥克利斯
 Diophantus 狄奥芬塔斯
 Dirichlet 狄里赫利
 Duhem 杜汉

E

Edleston 爱尔斯顿
 Edward VI 爱德华六世
 Eisenlohr 艾森劳尔
 Eisenstein 爱森斯坦
 Eratosthenes 爱妥斯泰尼斯

Euclid 欧几里得
 Eudemus 欧德摩斯
 Eudoxus 欧铎克色斯
 Euler, Leonhard 李昂纳德·欧勒
 Eutocius 欧图西亚斯

F

Fagnano 法格那诺
 Fermat, Pierre 佩亚尔·费尔马
 Ferrari 斐拉里
 Ferro, Scipio del 西披奥·德尔·弗罗
 Flamsteed 福莱姆斯代
 Florida 佛罗里达
 Fourier 傅里叶
 Frederick the Great 腓特烈大帝

G

Galileo 伽利略
 Galois 伽罗瓦
 Gama, Vasco da 法斯哥·达·伽马
 Gauss, Karl Friedrich 卡尔·弗里得利希·高斯
 Gellibrand, Henry 亨利·杰利伯兰
 Gerard 杰勒德
 Gerbert 杰尔伯特
 Gergonne 日尔岗诺
 Girard, Albert 亚尔伯·吉拉德
 Gregory XIII 格列高利十三世
 Gregory, James 詹姆士·格雷果里

Guldin 古尔丁
Gunter, Edmund 爱德蒙·冈特

H

Halifax, John (John of Holywood, or Sacrobosco) 约翰·哈利法克斯(好莱坞的约翰,或沙克罗色斯柯)
Halley 哈雷
Hamilton, Sir W. R. 汉密尔顿
Hammurabi 汉谟拉比
Harriot, Thomas 托马斯·哈里欧
Heath 希思
Henry 亨利
Hermann, Jakob 约可伯·赫尔曼
Hermite 厄密
Hero 希罗
Herodotus 希罗多德
Herschel 赫歇尔
Hevelius 赫维留
Hiero 尼洛
Hipparchus 喜帕恰斯
Hippias 希庇亚斯
Hippocrates 希波克拉底
Hire, Philippe de la 菲利浦·狄·拉·希尔
Hooke 胡克
Horsley 郝斯莱
L' Hospital, Guillaume Francois Antoine 吉劳美·法兰索斯·安东尼·罗彼塔
Hudde, Johann 约翰·赫德
Huguenots 胡格诺
Huygens 惠更斯

Hyksos 希克索斯
Hypatia 希帕蒂亚
Hypsicles 喜西克利斯

J

Jacobi, K. G. J. 雅可比
Jakob 亚可伯
Joachim, Georg (Rhœlicus) 乔格·约阿希姆(雷铁克斯)
John of Seville (Johannes Hispalensis) 塞维利亚的约翰(约翰·希思派林西斯)
Justinian 查士丁尼

K

Kästner 喀斯纳
keill, John 约翰·开尔
Kepler 开普勒
Klein, Felix 菲力克斯·克莱因
Korra, Tabit ibn 泰别脱·伊本·考拉
Kronecker 克罗内克
Kummer 库麦尔

L

Lacroix, Sylvestre Francois 萨伐斯特·法兰索斯·拉克罗克斯
La Hire, Philippe de 菲利浦·狄·拉·希尔
Lalande 拉兰得
Lalouère, Jesuit 耶稣·拉鲁埃尔
Lambert, Johann Heinrich 琼·亨

利奇·兰伯特

Lancelot 兰斯洛特

Landan, E. 兰道

Landen, John 约翰·兰登

Langrange, Joseph Louis 约瑟夫·
路易斯·拉格朗日

Laplace, Simon Pierre 西蒙·帕
爱莱·拉普拉斯

Legendre, Adrien Marie 阿得润·
马利亚·勒让德

Leibniz, Gottfried Wilhelm 葛特
福莱·威尔赫姆·莱布尼兹

Leonardo da Vinci 利奥纳多·
达·芬奇

Leonardo of Pisa(Fibonacci) 比萨
的列奥纳多(斐波纳奇)

Lie, Sophus 索菲斯·李

Lindemann 林德曼

Liouville 刘维尔

Lobachevsky 罗巴切夫斯基

Loftus, W. K. 劳夫特斯

Louis XIV 路易十四

Lucasian 卢卡西安

Luther 路得

M

Maclaurin, Collin 柯林·马克劳
林

Magellan 麦哲伦

mahavira 马哈维拉

Malebranche 马勒伯朗士

Manfredi 曼弗来狄

Marcellus 马斯勒斯

Martel, Charles 查尔斯·玛铁尔

Maupertuis, P. L. M. de 莫培
督

Maurolycus, Franciscus 法兰西
斯卡斯·摩罗利卡斯

Medici 美第奇

Menœchmus 孟尼区玛斯

Menelaus 梅内莱厄斯

Mercator 墨卡托

Mersenne 梅尔生

Méziriac 梅日利

Mikami 米卡米

Mohammed 穆罕默德

Monge, Gaspard 伽斯帕·蒙日

Monte, Guido Ubaldo del 吉多·
巴多·德·孟特

Montmort 孟特摩

N

Napier, John 约翰·纳皮尔

Napoleon 拿破仑

Nemorarius, Jordanus of Saxony
(Jordanus Saxo) 撒克松尼的约
敦纳斯·尼摩拉略斯(约敦纳斯·
撒克叟)

Neugebauer 牛加保

Newton, Issac 艾萨克·牛顿

Nicolas of Cusa 久萨的尼可拉斯

Nicole 尼科尔

Nicomachus 尼科马卡斯

Nieuwentijt, Bernard 贝纳得·纽
汶提

Norman, Robet 罗伯特·诺曼

Norwood, Richard 雷恰·诺乌

O

Oldenburg 奥尔登堡

Oresme, Nicolas 尼可拉斯·鄂雷森

Origen 奥利金

Oughtred, William 威廉·乌特勒

P

Paciuolo (Paccioli, Pacioli) 帕西欧洛(帕克西奥里, 帕西奥里)

Pappus 派帕斯

Parent, Autoine 安东尼·巴伦

Parmenides 巴门尼德

Pascal, Blaise 卜莱斯·帕斯卡

Pascal, Etienne 依丁·帕斯卡

Pascal, Jacqueline 嘉克灵·帕斯卡

Paulisa Siddhanta 朴利沙·薛汉达

Peacock 皮科克

Pell 裴尔

Pericles 伯里克利

Philip 菲力浦

Philolaus 菲罗拉亚斯

Picard, M. 皮卡尔

Pitiscus, Bartolomaus 巴妥罗玛斯·皮铁斯卡斯

Plato 柏拉图

Plücker, Julius 朱勒斯·普吕克

Poincaré, Henri 亨利·庞加莱

Poisson, Siméon Denis 西蒙·丹尼斯·泊松

Polycrates 波莱克拉兹

Poncelet Jean Victor J. V. 庞赛莱

Proclus 普罗克洛斯

Ptolemy (Claudius Ptolemæus) 托勒密(克劳地亚斯·托勒密)

Puerbach, Georg (Peuerbach, Purbach) 乔格·波尔巴哈(皮尔巴哈, 蒲尔巴哈)

Pythagoras 毕达哥拉斯

R

Raleigh, Walter 沃尔特·罗利

Ramus, Peter 彼得·累马斯

Raphson 拉普森

Raschid, Harun al 赫伦·阿尔·拉斯切特

Reorde, Robert 罗伯特·里柯德

Regiomontanus (Johannes Müller)

雷乔蒙塔努斯(约翰·穆勒)

Rennes 雷恩

Rhind 莱登

Riccati 黎卡提

Riemann 黎曼

Robert of Chester 切斯特的罗伯特

Roberval, Giles Personne de 盖尔斯·潘尚·狄·罗伯佛尔

Roomen, Adriaen von (Adrianus Romanus, Adrien Romain) 亚得里安·丰·鲁曼(亚得里安纳斯·鲁

曼纳斯, 亚得里安·鲁曼)

Rudolff, Christoff 克里斯多夫·
鲁道夫

Rudolph II 鲁道夫二世

S

Saccheri 萨开里

Schooten, Van 万·舒腾

Segner, J. A. 萨格纳

Seleucids 塞琉西

Sesostris (Ramses II) 萨斯特雷
斯(拉美西斯二世)

Simpson, Thomas 托马斯·辛普
森

Sinclair 辛克莱

Slusius 斯留萨斯

Smith, H. J. S. 史密斯

Smith, Robert 罗伯特·史密斯

Socrates 苏格拉底

Speidell, John 约翰·司皮得尔

Speusippos 彪西波

Sridhara 司里特哈拉

St. Cyran 圣塞伦

Steiner, Jakob 约可伯·斯坦纳

Stevin, Simon (Stevinus) 西门·斯
特文(斯特文那斯)

Stifel, Michael 迈克尔·史替福

Stirling, James J. 斯特林

Sturm 史笃姆

Sylvester 西尔威斯特

Sylvester II 西尔威斯特二世

T

Tartaglia (Nicolo Fontano) 塔尔塔
格里亚(尼可拉·方丹纳)

Taylor, Brook 布鲁克·泰勒

Thales 泰利斯

Theætetus 铁塔斯

Theodoric 狄奥多里克

Theodosius 狄奥多西

Theon 地昂

Torricelli, Evangelista 伊凡吉利
斯塔·托里切利

Tunstall, Cuthbert 卡司柏忒·邓
斯托

V

Vespucci 韦斯甫奇

Vieta (Francois Veète) 韦达(佛
兰西斯·韦埃特)

Vlacq, Adrian 阿德兰·弗拉克

Voltaire 伏尔泰

von Guericke 冯·哥利克

von Staudt 冯·史陶特

W

Wafa, Abu'l 阿布尔·威法

Wallis, John 约翰·沃利斯

Weber 韦伯

Weierstrass 维尔斯特拉斯

Whewell 怀威耳

Whitehead, Alfred North 阿尔富
雷·诺士·怀特黑

Widman, Johann 约翰·韦曼

Xerxes 薛西斯

Wilkins 威尔金斯

Y

Wingate, Edmund 爱德蒙·温盖特

Yunos, Ibn 伊木·尤诺斯

Wren 雷恩

Z

Wright, Edward 爱德华·赖特

X

Zeno 芝诺

Xenocrates 色诺克拉底

鄧平如

PDG

地名译名对照表

A

Aachen 亚琛
Aberdeen 阿伯丁
Ægean sea 爱琴海
Alexandria 亚历山大
Alps 阿尔卑斯
Amsterdam 阿姆斯特丹
Antwerp 安特卫普
Arabia 阿拉伯
Aryan 雅利安
Athens 雅典

B

Babylonia 巴比伦
Baghdad 巴格达
Bamberg 班堡
Basel 巴塞尔
Batan 巴坦
Bavaria 巴伐利亚
Beaumont 博蒙特
Beauvais 比乌外斯
Benedictine 本笃会

Bithynia 巴艾图尼亚
Bologna 博洛尼亚
Bremen 不来梅
Brescia 布雷西亚
Britain 不列颠
Bruges 布鲁日
Brunswick 不伦瑞克
Byzantine 拜占庭

C

Cairo 开罗
California 加利福尼亚
Cambrai 威尔士
Cape of Good Hope 好望角
Cæsars, the city of 恺撒城
Casi 卡西
Castile 蒂利亚
Central Asia 中亚细亚
Chœronea 查罗尼亚
Chalcedon 加尔西顿
Champagne 香巴尼
Chartres 查脱来斯
Chios 开俄斯
Christiania 克里斯丁亚那

Cloyne 克洛纳
 Cnidos 奈达斯
 Cologne 科隆
 Constantinople 君士坦丁堡
 Cordova 科尔多瓦
 Cremona 克雷莫那
 Croton 克劳登
 Cyrene 昔兰尼

D

Damascus 大马士革
 Delos 得洛斯
 Dublin 都柏林

E

Edinburgh 爱丁堡
 Egypt 埃及
 Elea 埃利亚
 Elis 伊利斯
 England 英格兰

F

Florence 佛罗伦萨
 France 法兰西
 Frankfort 法兰克福

G

Gaza 加沙
 Genoa 热内亚
 Glasgow 格拉斯哥
 Göttingen 哥廷根
 Grantham 葛兰萨姆

Graz 格拉茨
 Greece 希腊
 Greenwich 格林尼治
 Groningen 格罗宁根

H

Halle 哈雷
 Holland 荷兰
 Holstein 霍斯坦
 Hungary 匈牙利

I

Indus 印度河
 Ionian shire 爱奥尼亚海岸
 Italy 意大利

J

Jarrow 查罗
 Jena 耶拿
 Jerusalem 耶路撒冷

K

Kasan 喀山
 Königsberg 哥尼斯堡

L

La Haye 拉哈叶
 Lapland 拉普兰
 Larsa 拉莎
 Larsan 拉山
 Leipzig 莱比锡

Leyden 莱顿

Lyons 里昂

M

Macedon 马其顿

Marburg 马尔堡

Mecca 麦加

Medina 麦地那

Merchiston 曼彻斯特

Mesopotamia 美索不达米亚

Messina 墨西拿

Milan 米兰

Miletus 米利都

N

Naples 那不勒斯

Netherlands 尼德兰

Nicaea 尼西亚

Nile 尼罗河

Normandy 诺曼底

Nuremberg 纽伦堡

O

Ostrogothes 东哥特

P

Padua 帕多瓦

Paris 巴黎

Parma 帕尔马

Pavia 巴维亚

Peloponnesus 伯罗奔尼撒

Perga 帕尔加

Pergamum 拍加曼

Persia 波斯

Persian Gulf 波斯湾

Perugia 佩鲁贾

Phoenicia 腓尼基

Pisa 比萨

Poitou 普瓦图

Prague 布拉格

Prayage 泼拉耶加

R

Ratisbon 雷根斯堡

Rheims 兰斯

Rome 罗马

S

Salamis 赛兰米斯

Samos 萨摩斯岛

Saragossa 萨拉戈萨

Senkereh 森开莱

Sicily 西西里

Spain 西班牙

Sparta 斯巴达

St. Andrews 圣安德鲁

St. Helena 赫勒拿

St. Petersburg 圣彼得堡

Swiss 瑞士

Syracuse 叙拉古

Syria 叙利亚

T

Tarentum 泰兰潭

Tello 泰陆

Tigris - Euphrates 底格里斯—幼
发拉底

Tivoli 提伏利

Toledo 托莱多

Touraine 都兰

Tours 图尔

Treves 特里尔

Turin 都灵

Tuscany 托斯卡纳

V

Venice 威尼斯

Versailles 凡尔赛

Vienna 维也纳

Virgina 弗吉尼亚

Vitry 维特里

W

Woolsthorpe 伍斯特荷

Woolwich 伍利治

Y

York 约克

后 记

本书于1958年由伦敦 Taylor and Francis 股份有限公司出版。作者 J.F. 斯科特当时是英国 Middlesex 地区的圣玛丽学院副校长,曾获得文学学士、哲学博士、理学博士学位,是著名的数学史家。早年出版过有关华莱士和笛卡儿的传记,随后又写了现在这本书。

本书旨在描述从上古时代起至19世纪初为止2000年间主要数学概念的发展。作者尊重史实,注重第一手资料,在介绍重要数学家的工作时,大量从他们的原著中引用材料。在不列颠博物馆、英国皇家学会和剑桥大学三一学院的帮助下,引用了比较多的史料,使人们对原始的情况获得了深刻的印象。

作者还注意到数学知识的继承性和积累性,并不把重大的发现和发明完全归功于某一个人。例如对欧几里得和牛顿这样一些主要的流派,作者也注意到说明他们的成就的渊源,从而勾画出数学科学本身发展的规律。

学习科学史的目的,不仅是为了了解一门科学的发生和发展,以便在科学研究的方法和途径方面获得启示,而且可以从科学家身上学到孜孜不倦的献身精神。为此,本书不仅可供科学史工作者参考,也是一本值得向广大数学工作者推荐的书。

本书译就于1965年。蹉跎十余年,现在才得以与读者见面。付印之前,承蒙李绪文同志阅读了全部译稿,并指出了译文中的若干错误。第五章《东方的数学》中涉及到梵文的地方,又承南亚研究所蒋忠新同志协助解决了文字中的一些问题,在此一并致谢。

原文中极少数译者认为是印刷或内容上的错误,已在译文中作了订正而没有一一作注。限于水平,译文和译注中可能有不少错误,敬希读者给予批评指正。

侯德润

1979年10月